Pour une version en vidéo de ce cours, c'est par ici.

Polynômes

Un polynôme est une somme de fonctions. Nous nous intéresserons ici à deux types de polynômes : de degré 2 et de degré 3

J'ai créé deux appliquettes Géogebra pour chacun de polynômes : cliquer sur les liens pour les ouvrir et manipuler les coefficients et voir leur effet sur les courbes.

Polynôme de degré 2

Un polynôme de degré 2 est une fonction qui a la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

C'est donc la somme d'une fonction carrée et d'une fonction affine.

$$f(x) =$$

$$ax^2$$

$$bx + c$$

On notera :

- que si $a < 0$, la courbe est une parabole ouverte vers le bas
- que si $a > 0$, la courbe est une parabole ouverte vers le haut
- que si $b < 0$, la courbe est décalée vers la droite
- que si $b > 0$, la courbe est décalée vers la gauche
- que c est l'ordonnée à l'origine

Polynôme de degré 3

Un polynôme de degré 3 est une fonction qui a la forme :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Il s'agit donc de la somme d'une fonction cube, une fonction carrée et une fonction affine.

$$f(x) =$$

$$ax^3$$

$$bx^2$$

$$cx + d$$

Comme pour les fonctions dont il est composé, l'ordonnée à l'origine est donnée par la constante (ici, d). Outre cela, le comportement d'un polynôme de degré 3 est mieux compris lorsqu'expérimenté par soi-même… Notons tout de même trois points d'intérêt :

- le minimum local
- le maximum local
- le point d'inflexion, localisé pile entre les extrema locaux (minimum et maximum local)

Je n'ai pas grand-chose de plus à dire sur les polynômes pour le moment. Il va falloir patienter jusqu'à ce qu'on parle de dérivées.

Fonctions logarithmiques et exponentielles

Le logarithme de base n d'un nombre est le nombre de fois que n est multiplié par lui-même pour obtenir ce nombre.

$ln_n(x) = \prod_0^x ni$

Par exemple, le logarithme de base 10 du nombre 1000 est 3 :

$$10 \times 10 \ \times 10 \ = \ 1000$$

$$10^3 = 1000$$

$$log_{10}(1000) = 3$$

On peut d'ores et déjà deviner la réciproque d'un logarithme et d'un exposant :

$$log_n(n^x) = x$$

$$n^{log_n(y)} = y$$

Le logarithme naturel

Outre les logarithmes de base 10, il existe potentiellement une infinité de logarithmes. Il y en a un, cependant, qui retient l'attention : le logarithme naturel de base e.

$$ln(e^x) = x$$

$$e^{ln(y)} = y$$

Le nombre de Euler e est un nombre irrationnel souvent approximé à 2,71828. Ce nombre a des propriétés fascinantes, mais pour le moment, nous nous contenterons de son usage pour résoudre certaines équations.

Il existe des tables logarithmiques qui listent le logarithme de nombres. A l'âge des calculatrices et des ordinateurs, ces tables sont devenues obsolètes, mais leur usage s'appuie sur des propriétés des logarithmes qui elles sont toujours utiles.

$$ln(A \times B) = ln(A) + ln(B)$$

$$ln\left(\frac{A}{B}\right) = ln(A) - ln(B)$$

Similairement, on déduira la même propriété pour les exposants :

$$e^A e^B = e^{A+B}$$

$$\frac{e^A}{e^B} = e^{A-B}$$

Cette dernière propriété, il faut le noter, s'étend à n'importe quel nombre à la place de e.

On notera enfin la propriété qui va nous être utile très vite :

$$ln(A^n) = n \ ln(A)$$

Fonction logarithmique, fonction exponentielle

Une fonction logarithmique est une fonction de la forme suivante :

$$f(x) = a \ ln(x) + b$$

On notera que :

- cette fonction n'est pas définie à $x \leq 0$ – en fait, elle va vers l'infini quand elle approche zéro.
- cette fonction est égale b lorsque $x = 1$

Pour une simulation de cette fonction, cliquer sur le lien suivant : fonction logarithme naturel.

Une fonction exponentielle est une fonction de la forme suivante :

$$f(x) = ae^x + b$$

On notera que :

- cette fonction est égale à $a + b$ lorsque $x = 0$.
- elle tend vers b quand x tend vers l'infini négatif

Pour une simulation de cette fonction, cliquer sur le lien suivant : fonction exponentielle.

Retour sur les suites géométriques

Nous avons vu que, pour trouver un terme de rang n d'une suite géométrique, il suffit d'appliquer la fonction :

$$U(n) = U_0 q^n$$

Où q est la raison de la suite géométrique et U_0 son premier terme.

Mais comment savoir à quel rang un terme se trouve ? C'est là que la dernière propriété des logarithmes que j'ai mentionnée devient utile.

Prenons un exemple un peu grotesque. Chaque fois que je plie une feuille de papier, je double son épaisseur. Doubler l'épaisseur d'une feuille de papier revient donc à créer une suite géométrique dont le premier terme est égal à l'épaisseur de la feuille de papier, et la raison q est 2. Si on admet que l'épaisseur d'une feuille de papier est de 0.2 mm (0.0002 m) :

$$U(n) = 0.0002 \times 2^n$$

Admettant qu'on ait une très grande feuille de papier, combien de fois faudrait-il la plier pour atteindre une épaisseur de un mètre ?

Nous avons affaire à une fonction exponentielle – la variable est dans l'exposant sur un nombre. Nous avons vu que la réciproque de l'exponentielle est le logarithme. Ecrivons l'équation :

$$1 = 0.0002 \times 2^n$$

On peut commencer à la résoudre : la réciproque de la multiplication est la division :

$$\frac{1}{0.0002} = 2^n$$

Et, comme on vient de l'apprendre, la réciproque de l'exponentielle est le logarithme naturel. On met donc les deux côtés dans un logarithme naturel :

$$ln\left(\frac{1}{0.0002}\right) = ln(2^n)$$

La dernière propriété des logarithmes nous permet d'écrire :

$$ln\left(\frac{1}{0.0002}\right) = n\ ln(2)$$

Ne reste plus qu'à diviser les deux côtés par $ln(2)$ et de mettre l'autre côté de l'équation dans une calculatrice :

$$\frac{ln\left(\frac{1}{0.0002}\right)}{ln(2)} = n$$

$$n \approx 12$$

Plus intéressant peut être : et si on remplaçait le mètre par la distance entre la Terre et la Lune (384 400 000m) ?

$$\frac{ln\left(\frac{384\,400\,000}{0.0002}\right)}{ln(2)} = n$$

$$n \approx 41$$

Il suffirait de 41 pliages pour obtenir une épaisseur égale à la distance entre la Terre et la Lune. A supposer que la feuille soit assez grande…

Ceux d'entre vous qui sont familiers avec un livre sur l'autostop dans la galaxie noterons que ce n'est quand même pas loin de 42…