Matrice inverse

Rappelons-nous quel était notre objectif : résoudre une équation à n inconnues.

Déjà, nous avons vu que nous pouvons réécrire un système de trois équations sous forme de matrices :

$$a_x x + a_y y + a_z z = A$$

$$b_x x + b_y y + b_z z = B$$

$$c_x x + c_y y + c_z z = C$$

...devient :

$$\begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

Appelons la première matrice M, celle contenant les inconnues X, et celle contenant les constantes A. On obtient alors l'équation :

$$M \times X \ = \ A$$

Normalement, pour résoudre cette équation, on doit multiplier les deux côtés du signe égal par l'inverse de la matrice. On obtiendrait alors :

$$X = M^{-1} \times A$$

La question est donc : comment trouver M^{-1} ?

Si c'était une équation simple, on devrait trouver le nombre qui, multiplié par le nombre qu'on cherche à faire passer de l'autre côté du signe égal, donnerait 1.

Ici, on cherche la *matrice* qui, multipliée par M, donnerait la **matrice unitaire** (une matrice égale à 1).

$$\begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vous pouvez vous amuser à multiplier n'importe quelle matrice par la matrice unitaire, et vous verrez qu'en effet, elle est égale à 1 : le résultat serait la matrice que vous avez multipliée par la matrice unitaire.

Sans plus d'explications, passons à la procédure pour trouver M^{-1}. Et pour faciliter la lecture, prenons une matrice 2×2.

$$M \ = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Tout d'abord, on doit trouver la **comatrice**. La comatrice d'une matrice M est une matrice qui contient les cofacteurs de la matrice M. On se souvient de comment trouver les cofacteurs :

$$(-1)^{i+j} \, det(A_{ij})$$

Donc, la comatrice de notre matrice est :

$$com\, M \ = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Maintenant, on prend la **transposée** de la comatrice. La transposée est simplement la matrice où les termes en haut à droite sont intervertis avec les termes en bas à gauche – les lignes sont maintenant des colonnes, les colonnes des lignes. Prenant un exemple avec une matrice 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$^{t}A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

Donc, prenons la transposée de notre comatrice :

$$^{t}com\, M = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Et enfin, on divise tout par le déterminant de la matrice.

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

J'ai promis plus tôt que le produit d'une matrice avec son inverse donne la matrice unitaire. On va essayer ça :

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{-b}{ad - bc} \\ \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ad - bc}{ad - bc} & \frac{bd - bd}{ad - bc} \\ \frac{-ac + ac}{ad - bc} & \frac{-bc + ad}{ad - bc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tout cela fait une procédure à étapes multiples pour trouver l'inverse d'une matrice.

Incidemment, pour trouver l'inverse d'une matrice avec une feuille de calculs, la fonction est :

`=INVERSEMAT(`matrice`)`

Et voilà la troisième fois que la feuille de calculs fait tout le travail à notre place.