Le calcul infinitésimal est un champ des mathématiques dont la fondation est attribuée à Leibniz et Newton. C'est important, parce que Newton est aussi considéré comme le père fondateur de la physique. C'est donc le type de mathématiques que les physiciens et les ingénieurs utilisent quotidiennement. Et c'est un champ des mathématiques basé sur deux idées simples : les choses changent, et les choses sont composées de petites choses.

## Dérivées et leur approximation

On a vu que les fonctions évoluent le long de l'axe des abscisses : elles croissent (montent), décroissent (descendent) et passent par des extrema (minimum ou maximum).

Si on prend deux points sur une courbe, près l'un de l'autre, et qu'on tire une ligne droite, on obtient l'hypoténuse d'un triangle qui épouse la courbe – c'est une approximation. La base de ce triangle est la variation $\Delta x$ entre les deux points. Sa hauteur est la variation $\Delta y$ entre les deux points. On peut calculer la tangente – la pente de la courbe :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

En faisant quelques tests, on note quelque chose : si la pente est ascendante (elle monte), la tangente est une valeur positive. Si la pente est descendante, la tangente est négative. Et s'il n'y a pas de pente, la tangente est égale à zéro.

En faisant en sorte que le $\Delta$ soit très petit, et en répétant le calcul pour un grand nombre de paires de points, on obtient un tableau de valeurs. En en faisant une représentation graphique, on obtient une deuxième courbe. Appelons la première courbe $f(x)$ et la deuxième courbe $f'(x)$ (l'apostrophe se dit *prime*).

Testons une fonction linéaire de type $f(x) = ax$, et trouvons la fonction $f'$. On note que cette dernière est une fonction constante, qui ne change pas avec $x$. Plus encore : cette valeur de $y$ qui ne change pas est presqu'égale au coefficient directeur $a$ de la fonction affine. En changeant le pas pour une valeur plus petite, elle en devient encore plus proche.

De cette expérience, on déduit une chose et on prend une décision :

- si le pas était infiniment petit, la valeur constante représentée par $f'$ serait exactement égale à la pente de la fonction affine.
- avant de faire d'autres expériences, on doit imaginer une variation $\Delta$ infiniment petite. La première lettre de Delta est un *d* majuscule : prenons un *d* minuscule.

$$\frac{dy}{dt}$$

- et puis, tant qu'on y est, appelons $f'$ la dérivée de $f$.

A ce stade, nous pouvons écrire :

Pour $f(x) = ax, f'(x) = a$

Répétons ce test pour une fonction carrée de la forme $f(x) = ax^2$. Avec un pas petit, et en variant la valeur de $a$, on constate que la fonction dérivée $f'(x)$ est une fonction affine dont le coefficient directeur est égal au double de celui de la fonction carrée.

On peut donc écrire :

Pour $f(x) = ax^2, f'(x) = 2ax$

Répétons une dernière fois ce test avant de faire une hypothèse : avec une fonction cube, de la forme $f(x) = ax^3$. En effectuant le même test, on constate que $f'(x)$ est une fonction carrée dont le coefficient directeur est égal au triple de celui de la fonction cube.

On peut donc écrire :

Pour $f(x) = ax^3$, $f'(x) = 3ax^2$

On peut enfin énoncer notre hypothèse :

**Pour $\boldsymbol{f(x) = ax^n, f'(x) = nax^{n-1}}$**

Et que fait-on, avec les hypothèses ? On les teste.

Par exemple, et si la fonction est $f(x) = c$, où $c$ est une constante ? Graphiquement, la fonction n'a pas de pente : c'est une ligne horizontale. Si on se rappelle que $x^0 = 1$, on peut réécrire la fonction :

$$f(x) = cx^0$$

En appliquant notre hypothèse, on voit que la dérivée – la pente – est en effet égale à zéro. Notre hypothèse est confirmée.

Il faudra juste penser à faire plus que quatre tests pour la confirmer définitivement…

Dans l'attente de ces tests, une simulation de fonctions simples et de leur dérivée : dérivées de fonctions simples.