Primitives

La primitive est *presque* la réciproque de la dérivée.

Pour rappel, la réciproque d'une opération est l'opération qui annulerait son effet. Par exemple, la réciproque de l'opération *ajouter 3* est *retirer 3*.

Prenons l'hypothèse qu'on a décrit tout à l'heure.

$$\text{Pour } f(x) = ax^n, f'(x) = nax^{n-1}$$

La réciproque de la dérivée, qu'on appelle primitive et qu'on note $F(x)$, est l'opération inverse. Il n'y a qu'à inverser :

Pour $f(x) = nax^{n-1}, F(x) = ax^n$

Ça ne va pas beaucoup nous aider.

D'abord, occupons-nous de l'exposant. Pour trouver la dérivée, il fallait retirer 1. Pour faire l'inverse, on supposera qu'il faut ajouter 1.

Ensuite, on multipliait a par l'exposant. Pour faire l'inverse, on supposera qu'il faut diviser par l'exposant mais attention : l'exposant *plus 1*.

$$\text{Pour } f(x) = nax^n, F(x) = \tfrac{a}{n+1}ax^{n+1}$$

Pourquoi ? Parce que comme ça, ça marche.

La preuve :

La dérivée de $f(x) = 3x^3$ est $f'(x) = 9x^2$. Pour retrouver la fonction $f(x)$, je n'ai qu'à prendre la primitive de $f'(x)$.

$$F(x) = \frac{9}{2+1}x^{2+1} = 3x^3$$

Apparemment, ça marche. Mais attention, c'est incomplet.

Au début, j'ai dit que la primitive était *presque* la réciproque de la dérivée. C'est parce que la dérivée d'une constante est égale à zéro.

Imaginons qu'on ait une fonction affine :

$$f(x) = 3x^2 + 8$$

La dérivée du premier terme est, suivant notre hypothèse, $6x$. La dérivée de la constante, comme on l'a vu, est zéro. Donc :

$$f'(x) = 6x$$

Essayons maintenant de retrouver la fonction de départ en prenant la primitive de cette dérivée :

$$F(x) = \frac{6}{1+1}x^{1+1} = 3x^2$$

Mais c'est faux ! La fonction originale contenait un terme constant, et il a disparu.

Lors du processus, la constante a disparu, et il est impossible de la retrouver. On doit donc présumer, lorsqu'on prend la primitive d'une fonction, qu'elle inclut une constante dont nous ne connaissons pas la valeur. Appelons-là c.

$$\boldsymbol{\text{Pour } f(x) = nax^n, F(x) = \tfrac{a}{n+1}ax^{n+1} + c}$$