Application des dérivées

Nous avons donc vu qu'une dérivée est une fonction f' qui décrit l'évolution d'une fonction f. Si la fonction croît, sa dérivée est positive ; si elle décroît, elle est négative. Et si elle est égale à zéro, la fonction passe par un extremum à ce point.

Concentrons-nous sur ce dernier point : nous avons entre nos mains un outil qui permet de trouver les coordonnées d'un maximum ou d'un minimum dans une fonction. En effet : si on prend la dérivée et qu'on l'égalise à zéro, on pourrait trouver la coordonnée horizontale de l'extremum. Et pour trouver sa coordonnée verticale, juste remplacer x dans la fonction originale et calculer l'image.

Prenons un exemple : un polynôme du second degré. La courbe d'un polynôme est toujours une parabole, donc n'importe lequel devrait avoir un maximum (ouvert vers le bas) ou un minimum (ouvert vers le haut).

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 54$$

On trouve rapidement la dérivée :

$$f'(x) = 6x - 12$$

On l'égalise à zéro :

$$0 = 6x - 12$$

Et on résout pour x :

$$x = \frac{12}{6} = 2$$

On trouve maintenant $f(2)$:

$$f(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 54$$
$$f(2) = 42$$

Les coordonnées de l'extremum sont donc :

$$(2; 42)$$

Pratique. Pas besoin de faire un graphique pour trouver l'extremum d'une fonction. Maintenant, ce serait bien de savoir si cet extremum est un maximum ou un minimum...

Mais on l'a, la solution : si la dérivée est négative, la fonction est décroissante, si elle est positive...

Il suffit d'évaluer la dérivée à une valeur inférieure à 2, la coordonnée horizontale de l'extremum : si elle est négative, ça veut dire qu'avant d'atteindre l'extremum la fonction était décroissante, et donc cet extremum est un minimum. Si elle est positive, la fonction est croissante, et c'est un maximum.

Prenons 1, puisque c'est inférieur à 2 et facile à calculer :

$$f'(1) = 6(1) - 12 = -6$$

La dérivée est négative, la pente est donc décroissante, et notre extremum est un minimum.

Mais on peut faire encore plus : trouver les racines d'un polynôme de degré 2.

Les racines, ce sont les points sur l'axe des abscisses par lesquels la courbe du polynôme passe. Les seules choses qu'on connaît d'eux, c'est que leurs coordonnées verticales sont égales à zéro, et qu'elles sont à une distance égale de l'extremum.

Mmh. Et on vient juste de trouver les coordonnées de l'extremum...

Prenons le modèle d'un polynôme de second degré :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Et prenons sa dérivée :

$$f'(x) = 2ax + b$$

Appelons la coordonné horizontale de l'extremum h, égalisons la dérivée à zéro, et résolvons :

$$0 = 2ah + b$$

$$h = \frac{-b}{2a}$$

Appelons la coordonnée verticale k, et nous obtenons une jolie petite formule pour calculer les coordonnées de l'extremum :

$$\left(\frac{-b}{2a}; f(k)\right)$$

Mais ce n'est pas cela qui nous intéresse : appelons la distance entre la coordonnée horizontale de l'extremum et la racine β. Comme on sait que la coordonnée verticale de la racine est zéro, on peut utiliser la fonction pour écrire :

$$0 = a\left(\frac{-b}{2a} + \beta\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a} + \beta\right) + c$$

On souhaite trouver ce β. Comme on connaît déjà les coordonnées de l'extremum, il nous suffirait de l'ajouter pour trouver celles d'une des racines.

D'abord, développons :

$$0 = a\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b\beta}{a} + \beta^2\right) - \frac{b^2}{2a} + b\beta + c$$

$$0 = \frac{b^2}{4a} - b\beta + a\beta^2 - \frac{b^2}{2a} + b\beta + c$$

Certains termes s'annulent, d'autres se combinent, ça fait toujours plaisir à voir :

$$0 = \frac{b^2}{4a} + a\beta^2 - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$0 = a\beta^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Ne reste plus qu'à résoudre pour β :

$$\beta = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

Réorganisons tout ça pour faire plus joli :

$$\beta = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nous avons trouvé une expression pour β. Et on sait qu'en l'ajoutant à la coordonnée horizontale de l'extremum, on trouvera celle d'une des racines. Et l'autre ? Il suffira de l'enlever.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Est-ce que j'ai déjà écrit cette preuve dans le premier cours sur les dérivées ? Oui. Mais je suis tellement content de l'avoir trouvée tout seul comme une grande personne la première fois que je me suis posé la question que je la répète ici.

En guise de simulation, noter que l'appliquette Geogebra sur le calcul de surface en dessous d'un polynôme de degré 2 inclus le calcul des racines : surface sous un polynôme de degré 2.