# Calculs de volumes cylindriques

On l'a vu, le volume d'un cylindre est simplement la surface de sa base multipliée par sa hauteur.

$$V = \pi r^2 h$$

Et si cette hauteur était une fonction de $r$ ? Pour un cylindre normal, cette fonction est une constante, mais si c'était une fonction linéaire, ou carré, ou n'importe quelle fonction.

Ici, nous allons utiliser notre capacité à décrire une courbe avec une fonction, puis l'appliquer au concept d'intégrale – l'addition de petits morceaux, le théorème fondamental de l'analyse.

Prenons un cône. Sa base est $\pi r^2$.

Un cône peut être divisé en petits cylindres de hauteur $dh$. On en déduit la formule pour un petit volume $dV$ :

$$dV = \pi r^2 dh$$

Rappel : $dV$ se dit *dérivée de V* et $dh$ se dit *dérivée de h*. $V$ et $h$ sont des fonctions.

Maintenant, prenons l'apothème d'un cône. C'est une fonction linéaire qui va des coordonnées $(0; H)$ aux coordonnées $(R; 0)$. On en déduit la fonction $h(r)$ :

$$h(r) = \frac{0 - H}{R - 0} r + H$$

$$h(r) = H - \frac{H}{R} r$$

Pour calculer un élément de volume $dV$, nous avons besoin de la dérivée de $h$. Trouvons là :

$$dh = -\frac{H}{R} dr$$

On intègre ce résultat à l'expression du volume $dV$ :

$$dV = -\pi r^2 \frac{H}{R} dr$$

Maintenant, nous pouvons prendre l'intégrale aux deux côtés de l'équation. A gauche, la variable d'intégration est le volume, donc on intègre de 0 à $V$ ; à droite, la variable d'intégration est $dr$, donc on intègre de 0 à $R$.

$$\int_0^V dV = -\pi \frac{H}{R} \int_0^R r^2 dr$$

Notez comme j'ai sorti les constantes qui multipliaient la variable d'intégration. La primitive en sera plus évidente.

$$[V]_0^V = -\pi \frac{H}{R} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R$$

Appliquons les limites d'intégration :

$$V - 0 = -\pi \frac{H}{R} \left(\frac{R^3}{3} - 0\right)$$

Tout cela se simplifie :

$$V = -\frac{1}{3} \pi H R^2$$

Ça ressemble en effet à la formule qu'une rapide recherche sur internet donne, mais pourquoi le signe négatif ?

C'est parce qu'on a commis une petite erreur sans grande importance : on a mal défini nos variables d'intégration du rayon. Et quand je dis *sans grande importance*, je mens.

Je disais qu'on additionnait des petits cylindres de hauteur $dh$. Mais au début, le cylindre a un rayon égal à $R$. A la fin, il a un rayon de 0. Il faut donc d'inverser les variables d'intégration pour le rayon :

$$\int_0^V dV = -\pi\frac{H}{R}\int_R^0 r^2 dr$$

$$[V]_0^V = -\pi\frac{H}{R}\left[\frac{r^3}{3}\right]_R^0$$

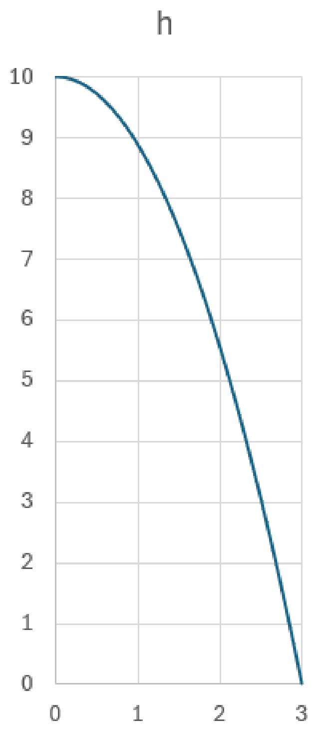
$$V - 0 = -\pi\frac{H}{R}\left(0 - \frac{R^3}{3}\right)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi HR^2$$

Lors de l'écriture de ce cours, j'ai *presque* volontairement commis cette erreur pour insister sur un point : il faut bien réfléchir avant de décider des variables d'intégration : où commence-t-on, où finit-on. Sinon, on se retrouve avec des résultats insensés qui prennent environ dix minutes à corriger alors qu'on doit préparer son prochain cours au lieu d'écrire des trucs que personne ne lit...

Le cours a été annulé, amusons-nous un peu : et si la fonction était une fonction carrée ?

Imaginons donc un cône dont l'apothème est défini par une fonction carrée. La hauteur de cette forme (le vertex) est $H$, et le rayon de la base est $R$.




On définit la fonction :

$$h(r) = \frac{0 - H}{R^2 - 0}r^2 + H$$

$$h(r) = H - \frac{H}{R^2}r^2$$

On trouve la dérivée et on l'intègre à la formule pour le volume d'un cylindre d'épaisseur $dh$ :

$$dh = -2\frac{H}{R^2}r\ dr$$

$$dV = -2\pi\frac{H}{R^2}r^3 dr$$

Plus qu'à prendre l'intégrale (Je ne commets pas la même erreur que tout à l'heure) :

$$V = -2\pi\frac{H}{R^2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_R^0$$

Et on simplifie.

$$V = \frac{\pi}{2}HR^2$$

On peut calculer manuellement (avec une feuille de calculs) la somme des volumes de petits cylindres de hauteur $\Delta h$ et comparer : ça marche.

Pour une simulation de ce précédent calcul, une appliquette Geogebra : volume sous une fonction carrée.