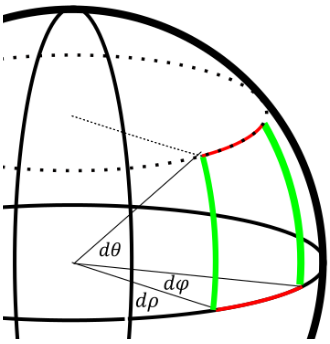


Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques sont en fait celles qu'on utilise en géographie :

- le rayon ρ correspond à l'altitude, plus le rayon de la Terre
- l'angle φ correspond à la longitude
- l'angle θ correspond à la latitude

Comme avec les coordonnées sphériques, on doit trouver des expressions avec des distances pour pouvoir calculer des surfaces et des volumes.

Tout d'abord, dans le sens de ρ, on a... $d\rho$

Ensuite dans le sens d'une longitude, on a $\rho d\theta$

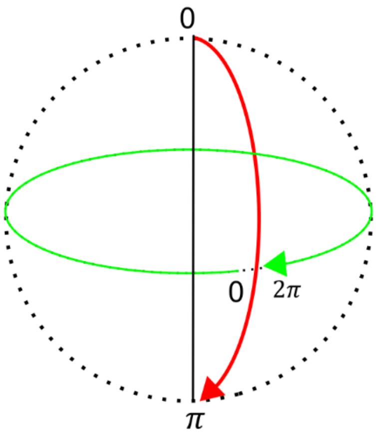
Enfin, dans le sens d'une latitude, on a $\rho sin(\theta) d\varphi$

Donc, un élément de volume en coordonnées sphériques est donné par :

$$dV = \rho^2 sin(\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

Trouvons tout de suite la formule pour le volume d'une sphère, ça va me permettre de justifier les limites dans chaque dimension :

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\rho} \rho^2 sin(\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$



Dans le sens de ρ, on va très logiquement de zéro à ρ.

Dans le sens de φ, on fait un tour complet : 0 → 2π.

Dans le sens de θ , on ne parcourt qu'un demi-cercle ; sinon, on balayerait deux fois une surface et on la compterait deux fois. On parcourt donc 0 → π

Résolvons les intégrales :

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\rho^3}{3} sin(\theta) d\theta d\varphi$$

$$V = \frac{\rho^3}{3} \int_0^{2\pi} [-cos(\theta)]_0^{\pi} d\varphi$$

$$V = \frac{\rho^3}{3} \int_0^{2\pi} \Big(-\big(cos(\pi)\big) - \big(-cos(0)\big)\Big)\, d\varphi$$

$$V = \frac{\rho^3}{3} \int_0^{2\pi} \big(-(-1) - (-1)\big) d\varphi$$

$$V = \frac{2}{3} \rho^3 (2\pi)$$

$$V = \frac{4}{3} \pi \rho^3$$

Qui est en effet, selon tous les vrais bouquins de mathématiques, la formule pour le volume d'une sphère.

Pour la surface d'une sphère, on a les mêmes dimensions mais on n'intègre pas sur ρ – c'est constant.

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^2 sin(\theta) d\theta d\varphi$$

$$S = 2\rho^2 \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$S = 4\pi\rho^2$$

Maintenant, armé de tout cela, on pourrait calculer le volume d'objets rigolos, comme celui d'un œuf. Mais cela dépasse l'objet de ce document.