Les équations différentielles sont d'abord et avant tout une méthode simple et efficace de briller en société.

Imaginez le tableau : vous jouez à Pictionnary avec votre famille. A un moment donné, au lieu de dessiner un arrosoir ou une tarouple, vous écrivez une équation différentielle du premier degré non-homogène et sa résolution. Pour sûr, votre famille serait impressionnée.

A part ça, les équations différentielles sont des équations où les variables sont des fonctions.

Et qu'est-ce qu'on fait, avec une équation ? On la résout.

Premier degré

Homogène

Imaginons une équation différentielle homogène du premier degré :

$$\frac{dy}{dt} + \lambda y = 0$$

Qu'est ce qui fait de cette équation une équation différentielle ?

La fonction y et sa dérivée $\frac{dy}{dt}$ sont présentes.

Qu'est ce qui fait de cette équation différentielle une équation homogène ?

Toute l'équation est égale à zéro.

Et pourquoi on l'appelle homogène ?

Probablement parce qu'elle n'est pas hétérogène. Non, en fait, je ne sais pas.

Mais au fait, on a déjà résolu une équation différentielle comme ça, lors de la stratégie d'intégration par séparation des variables :

On sépare les variables :

$$\frac{dy}{y} = -\lambda dt$$

On prend la primitive des deux côtés ; on n'oublie pas d'ajouter les constantes :

$$ln(y) + c_1 = -\lambda t + c_2$$

On résout pour y :

$$y = e^{-\lambda t + c_2 - c_1}$$

Et on simplifie. On note que $e^{c_2 - c_1}$ est une constante, qu'on appellera k.

$$y = e^{c_2 - c_1} e^{-\lambda t}$$

$$y = k e^{-\lambda t}$$

Alors c'est quoi, la procédure de résolution d'une équation différentielle homogène du premier ordre, si on savait déjà le faire ?

Hé bien, c'est exactement ça :

Pour toute équation différentielle de la forme :

$$\frac{dy}{dt} + \lambda y = 0$$

La solution est :

$$y = ke^{-\lambda t}$$

... où k dépend des conditions initiales.

Toute cela n'explique pas grand-chose. Prenons un exemple numérique (avec des valeurs) :

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 0, y(0) = 5$$

Vous avez noté la condition initiale ? C'est que quand $t = 0, y = 5$.

Ici, j'ai une équation différentielle du premier ordre et une condition initiale.

J'applique la solution :

$$y = ke^{-3t}$$

Puis la condition initiale :

$$y(0) = ke^{-3(0)}$$

$$5 = k$$

La solution complète est donc :

$$y = 5e^{-3t}$$

Les équations différentielles ne sont donc pas si compliquées.

Pour l'instant.

Prenons un exemple en physique :

Un condensateur chargé est connecté à une résistance. Un courant se crée, et le condensateur se décharge.

La tension sur le condensateur dépend de sa capacitance C et de la charge q qu'il contient :

$$U_C = \frac{q}{C}$$

La tension sur la résistance est donnée par la loi d'Ohm :

$$U_R = Ri$$

Et l'intensité est la charge passant par un point chaque seconde :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

La loi des mailles énonce que la somme des tensions est nécessairement égale à zéro. On écrit donc :

$$\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = 0$$

On peut réorganiser cette expression pour qu'elle s'apparente à notre modèle d'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0$$

On applique la solution :

$$q = ke^{-\frac{1}{RC}t}$$

La condition initiale est qu'a $t = 0$, le condensateur a une charge initiale Q_0.

$$q(0) = Q_0$$

On applique cette condition initiale à la solution :

$$Q_0 = ke^{-\frac{1}{RC}0}$$

$$k = Q_0$$

Et on reporte la solution complète :

$$q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Cette fonction donne la charge sur un condensateur en fonction du temps.