Non-homogène

Une équation différentielle non-homogène du premier ordre (ça roule sur la langue, hein ?) est une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dy}{dt} + \lambda y = F$$

La procédure de résolution ajoute deux ou trois étapes :

D'abord, écrire la solution générale y_0 de l'équation différentielle. La solution générale est la solution pour une équation différentielle du second ordre homogène (sans F).

$$y_0 = k(t)e^{-\lambda t}$$

Différence cruciale : k n'est plus simplement une constante qu'on ignore jusqu'à la fin, c'est maintenant une fonction de t.

Intégrer cette solution générale dans l'équation originale, et résoudre pour $k'(t)$:

$$\frac{d}{dt}\left(k(t)e^{-\lambda t}\right) + \lambda k(t)e^{-\lambda t} = F$$

$$k'(t)e^{-\lambda t} - \lambda k(t)e^{-\lambda t} + \lambda k(t)e^{-\lambda t} = F$$

Des termes s'annulent, c'est pratique :

$$k'(t)e^{-\lambda t} = F$$

$$k'(t) = Fe^{\lambda t}$$

Maintenant, il faut prendre la primitive aux deux côtés. Pour le côté gauche, c'est facile, mais pour le côté droit, au moins la première fois, il va falloir utiliser la technique de substitution $u = -\lambda t$ et $dt = -\frac{du}{\lambda}$:

Je réécris la fonction de manière plus intelligible :

$$dk = Fe^{\lambda t}dt$$

$$k(t) = \frac{F}{\lambda}e^{u} + c$$

$$k(t) = \frac{F}{\lambda}e^{\lambda t} + c$$

On peut mettre ce résultat dans la solution générale :

$$y = \left(\frac{F}{\lambda}e^{\lambda t} + c\right)e^{-\lambda t}$$

$$y = \frac{F}{\lambda} + ce^{-\lambda t}$$

Et, comme d'habitude, c dépend des conditions initiales.

C'est un peu plus compliqué, cette procédure – en plus, il y a une intégrale par substitution en plein milieu – mais on se rendra très vite compte que certaines parties deviennent des automatismes.

Prenons un exemple avec des valeurs numériques :

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 21 \text{ et } y(0) = 5$$

Tout d'abord, la solution générale :

$$y_0 = k(t)e^{-3t}$$

On place ça dans l'équation originale, y a des termes qui s'annulent, on résout pour $k'(t)$, et on prend l'intégrale aux deux côtés et ça donne :

$$k(t) = \frac{21}{3}e^{3t} + c$$

On place tout ça dans la solution générale pour obtenir la solution particulière :

$$y = (7e^{3t} + c)e^{-3t}$$

Et on développe :

$$y = 7 + ce^{-3t}$$

Enfin, on applique les conditions initiales :

$$5 = 7 + c$$

$$c = 5 - 7 = -2$$

Ce qui nous donne la solution :

$$y = 7 - 2e^{-3t}$$

Avant de passer à un exemple pratique, et si on vérifiait que je ne dise pas des bêtises ? Pour cela, il suffirait d'insérer ce résultat dans l'équation originale.

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 21$$

$$6e^{-3t} + 3(7 - 2e^{-3t}) = 21$$

$$6e^{-3t} + 21 - 6e^{-3t} = 21$$

$$21 = 21$$

Je ne dis pas des bêtises.

Prenons maintenant un exemple en physique :

Un condensateur est branché en série avec une résistance et une source de tension. La loi des mailles donne dans ce cas :

$$U - \frac{q}{C} - R\frac{dq}{dt} = 0$$

On réorganise :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{U}{R}$$

La solution générale est :

$$q_0 = k(t)e^{\frac{-t}{RC}}$$

On place ça dans l'équation originale, y a des termes qui s'annulent, on résout pour $k'(t)$, et on prend l'intégrale aux deux côtés et ça donne :

$$k(t) = UCe^{\frac{t}{RC}} + c$$

On place tout ça dans la solution générale pour obtenir la solution particulière :

$$q = \left(UCe^{\frac{t}{RC}} + c\right)e^{\frac{-t}{RC}}$$

$$q = UC + ce^{\frac{-t}{RC}}$$

Comme condition initiale, on peut deviner que le condensateur est déchargé au départ. La charge q est donc égale à zéro à $t = 0$.

$$0 = UC + c$$

$$c = -UC$$

Ce qui nous donne la solution complète :

$$q = UC\left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right)$$