

Mathématiques

Résumé maladroit d'un cours de maths par un imposteur

Quand je suis revenu en France, j'avais déjà enseigné les sciences physiques dans un lycée. J'ai donc postulé un poste d'enseignement dans un centre de formation des apprentis pour enseigner la même matière mais, lors de l'entretien, on m'annonça que j'enseignerai aussi les mathématiques.

Je ne suis pas un prof de maths.

Entendons-nous bien : j'ai le plus grand respect et la plus grande admiration pour les gens qui lisent des pages de symboles bizarres comme je lis le mode d'emploi d'un marteau. Plus encore, je sais qu'en tant que prof de sciences physiques, je devrais savoir utiliser les outils mathématiques pour résoudre un grand nombre de problèmes. En vérité, je l'avoue, la quantité de ce que je connais est une toute petite fraction de ce qu'il y a à connaître sur le sujet.

Alors, pour pouvoir enseigner, j'ai appris.

En enseignant les mathématiques, je me suis rendu compte de plusieurs choses. D'abord, tout est lié. On ne peut pas comprendre les dérivées sans être capable de résoudre une équation. On ne peut pas utiliser les vecteurs sans savoir ce qu'est la distributivité.

Plus encore, chaque concept mathématique a une application pratique, et chaque concept supplémentaire permet de répondre à des questions de plus en plus complexes. L'application des mathématiques aux sciences physiques est évidente, et on admettra que savoir où va tomber un projectile ou comment fabriquer un moteur électrique sont des questions sinon intéressantes, au moins importantes.

Donc, j'enseigne les mathématiques, certes, mais pas comme un prof de maths. Je les enseigne comme je les comprends et comme je les utilise en sciences physiques. Mais pas mieux qu'un prof de maths.

Ce résumé de cours, couvrant les programmes de la seconde au BTS, est plus un moyen pour moi de mettre toutes les idées à plat. Littéraire, je comprends mieux de quoi je parle quand je l'écris. Ce cours, comme tous les cours, a un intérêt limité. C'est juste une narration des mathématiques avec une emphase sur les connections entre les différents concepts. Avec des descriptions détaillées mais pas toujours rigoureuses ; avec des preuves, mais uniquement quand je crois les comprendre...

Alors évidemment, encore loin de la retraite, je vais revenir dessus. Améliorer ma compréhension des choses, et revenir sur comment l'expliquer d'une manière plus claire, plus efficace. Et un jour, peut-être, je serai guéri du syndrome de l'imposteur qui me submerge chaque fois que j'écris une évaluation.

Mais j'en doute.

Encore une fois, ce cours ne sert à rien si on ne fait rien d'autre que le lire. Je vous invite à jouer avec les idées décrites, et je m'évertuerai à écrire des exemples et exercices pour illustrer ces propos.

Expressions	3
Equations.....	6
Géométrie dans le plan	14
Fonctions : des suites numériques aux dérivées.....	18
Vecteurs et trigonométrie	30

Géométrie dans l'espace.....	36
Matrices	38
Analyse.....	48
Equations différentielles	77

Expressions

Les expressions sont des phrases mathématiques. Elles contiennent des mots différents : nombres, variables, constantes, facteurs... et évidemment des verbes : les opérateurs mathématiques. Le point de ce chapitre est de (re)voir certains points importants à propos des mathématiques en tant que langage.

PEMDAS

La plupart des opérations sont assez intuitives. Si tout le monde n'est pas un as en calcul mental, on sait tous entrer sept fois huit dans une calculatrice.

C'est quand les calculs deviennent un peu plus longs qu'il faut commencer à faire attention. Les opérations ont un ordre, certaines prenant la priorité sur d'autres. C'est là que l'acronyme PEMDAS devient utile.

Tout d'abord, une règle générale : les opérations se font de gauche à droite dans le sens de la lecture.

Sauf si...

P pour parenthèses

Dans une expression, il y a parfois une ou plusieurs parties entre parenthèses. Elles peuvent être visibles :

$$3(2 + 5)$$

Ou sous-entendues :

$$\frac{3 + 9}{4}$$

Ici, les termes dans le numérateur sont entre parenthèses.

$$(3 + 9)/4$$

Les opérations entre parenthèses sont les premières à effectuer.

E pour exposant

Un exposant est un nombre situé en haut à droite d'un autre nombre ou d'une expression entre parenthèses. C'est le nombre de fois qu'on multiplie 1 par un nombre x . Vous connaissez probablement le carré et le cube, mais sachez qu'il est aussi possible de multiplier un nombre par lui-même n'importe quel nombre de fois. Par exemple, on peut le multiplier 0.5 fois par lui-même – on parle alors de racine carrée.

Quelques exemples : le carré, le cube, et la racine carrée :

$$x^2 = x \times x$$

$$x^3 = x \times x \times x$$

$$x^{1/2} = \sqrt{x}$$

Si l'exposant est négatif, c'est le nombre de fois qu'on divise 1 par un nombre x .

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Profitions-en pour rappeler que n'importe quel nombre à la puissance de 0 est égal à 1. Et x , c'est n'importe quel nombre.

$$x^0 = 1$$

Les opérations contenant un exposant sont à effectuer après s'être occupé des expressions entre parenthèses.

M pour multiplication, D pour division

Les multiplications et les divisions sont en fait une seule et même opération. En effet, on peut dire que diviser un nombre n par un nombre m revient à multiplier n par l'inverse de m .

$$\frac{n}{m} = n \times \frac{1}{m}$$

Pour mémoire, l'inverse d'une fraction est lorsqu'on échange le numérateur avec le dénominateur. Tout nombre peut être écrit comme une fraction – il se trouve que pour certains, le dénominateur de cette fraction est 1.

$$m = \frac{m}{1} \rightarrow \frac{1}{m}$$

Les opérations contenant une multiplication ou une division sont à effectuer après s'être occupé des parenthèses et des exposants. Si les deux sont présentes, on commence, comme d'habitude, par celle qui est le plus à gauche.

A pour addition, S pour soustraction

Comme avec les divisions qui sont en fait des multiplications, les soustractions ne sont jamais que l'addition d'un nombre négatif.

$$a - b = a + (-b)$$

Ces deux opérations sont donc à effectuer après toutes les autres, en commençant par celles situées le plus à gauche.



Voilà pour un rappel rapide de ce que sont les opérations et comment les effectuer. Nous allons maintenant passer à la manipulation d'expressions un petit peu plus avancée.

Développement

Nous avons revu les règles élémentaires d'opération. Passons à la manipulation d'expressions.

Une expression contenant des nombres et des lettres nécessite parfois d'être manipulée. Par manipulée, on entend réécrite dans une manière qui paraît plus intelligible ou solvable. Par exemple, il peut paraître nécessaire de se débarrasser de parenthèses dans une expression.

$$a(b + c)$$

Ici, c'est la distributivité de la multiplication qui s'applique : les parenthèses sont comme des boîtes, et le facteur a est simplement le nombre de ces boîtes. Il suit logiquement que :

$$a(b + c) = ab + ac$$

Comme on a vu qu'une division était la même chose qu'une multiplication, on en déduit :

$$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Si ce sont deux boîtes qui se multiplient, alors les choses ne sont pas plus compliquées – juste plus longues.

$$(x + a)(x + b) = x^2 + xb + xa + ab$$

Ici, on a d'abord multiplié la deuxième boîte par x , puis par a et, comme x et a s'ajoutent, ajouter les deux.

On en profite pour découvrir deux **identités remarquables** – une manière de réécrire une expression entière :

$$(x \pm a)^2 = (x \pm a)(x \pm a) = x^2 \pm 2ax + a^2$$

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

Il y en aura d'autres – il serait bon de commencer à en dresser une liste.

Factorisation

La factorisation est l'opération inverse du développement, mais on l'utilise pour les mêmes raisons : réécrire une expression pour qu'elle soit plus simple à lire.

La factorisation revient à trouver le facteur commun à deux nombres ou plus.

$$ax + bx^2$$

Ici, les deux termes ont au moins un terme x . On peut donc diviser les deux termes par x et multiplier la parenthèse entière pour ne pas changer la valeur de l'expression.

$$x \left(\frac{ax}{x} + \frac{bx^2}{x} \right) = x(a + bx)$$

On a factorisé le x .

On notera que les identités remarquables notées précédemment permettent parfois de factoriser des expressions pas forcément faciles à factoriser à première vue. C'est bien là leur utilité...



Voilà pour quelques manipulations d'expressions. Il y en aura d'autres – notamment d'autres identités remarquables – mais on se contentera de ça pour le moment.

Equations

Si une expression est une phrase mathématique, une équation est une phrase qui veut dire quelque chose. Et elle dit quelque chose de simple : ce qui est à gauche du signe égal est égal à ce qui est à droite.

Une équation est donc une phrase incluant des lettres, nombres et opérateurs, séparés par un signe égal.

Le plus souvent, lorsqu'on parle d'équation, on parle aussi d'inconnue. Et en général, l'inconnue, on veut la connaître. S'il existe, pour certains cas simples, des trucs (par exemple, le produit en croix), il est bon de comprendre la mécanique de la résolution d'équation en étudiant son algorithme et sa logique. La logique est toujours la même : ce qui est à gauche du signe égal est égal à ce qui est à droite, et doit le rester.

Algorithme

Un algorithme est une série d'instructions qui se suivent. Par exemple, l'algorithme de l'habillement contient entre autres les instructions *mettre ses sous-vêtements*, *passer sa veste* et *mettre son pantalon*. L'ordre dans lequel on suit ces instructions est important – sinon, on se retrouve avec le slip par-dessus le pantalon. Ce n'est donc pas une simple liste à suivre, mais une procédure qui demande un peu de réflexion.

La base de l'algorithme est dans le signe égal : ce qui est à gauche est toujours égal à ce qui est à droite. Si on ajoute des choses à gauche, on doit aussi les ajouter à droite ; si on en retire d'un côté, on doit aussi les retirer de l'autre.

Donc, allons-y :

1. Identifier l'inconnue

Parfois, l'inconnue s'appelle x , parfois c'est autre chose. Et parfois, surtout en physique, l'équation entière est composée de lettres. Dans ce cas aussi, résoudre signifie simplement isoler l'inconnue.

2. Rassembler le ou les termes contenant l'inconnue d'un côté du signe égal, le reste de l'autre ; simplifier

Pour rassembler, il faut parfois passer un terme d'un côté à l'autre. Il faut alors le retirer des deux côtés, ou l'ajouter, ou le diviser, le multiplier... toujours aux deux côtés du signe égal.

3. Si une opération est faite sur l'inconnue, prendre sa réciproque

C'est quoi ça, la réciproque ? On va voir ça dans un instant...

4. Répéter la dernière étape jusqu'à ce que l'inconnue soit isolée

C'est généralement visible lorsqu'on arrive à ce stade : l'inconnue est toute seule d'un côté du signe égal...

5. Calculer l'autre côté

Une bonne habitude à prendre : garder tous les calculs pour la fin.

Réciproques

La réciproque d'une opération est l'opération qui permet de revenir à un état précédent.

Laissez-moi le temps d'expliquer...

Supposons que nous avons ajouté 3 à 2. Nous avons maintenant 5. La réciproque de l'opération qu'on vient de faire devrait nous permettre de revenir à 2. Cela signifie retirer 3. La réciproque de l'opération *ajouter 3* est donc *retirer 3*.

Supposons maintenant que nous avons divisé 12 par 4. Nous avons maintenant 3. Pour revenir à l'état précédent (12), il faudrait multiplier par quatre. La réciproque de l'opération *diviser par 4* est donc *multiplier par 4*.

Prendre la réciproque d'une opération permet d'isoler l'inconnue de n'importe quelle opération qui est faite sur elle – et, bien sûr, d'effectuer la même opération de l'autre côté. Encore faudrait-il connaître les réciproques de toutes les opérations... Listons-en certaines dans le détail :

Addition :

$$y = x + a$$

$$y - a = x + a - a$$

$$y - a = x$$

La réciproque de l'addition est donc la soustraction.

Soustraction :

$$y = x - a$$

$$y + a = x - a + a$$

$$y + a = x$$

La réciproque de la soustraction est donc l'addition.

Multiplication :

$$y = ax$$

$$\frac{y}{a} = \frac{ax}{a}$$

$$\frac{y}{a} = x$$

Division :

$$y = \frac{x}{a}$$

$$ya = \frac{x}{a} a$$

$$ya = x$$

On voit que la multiplication et la division sont les réciproques de l'une sur l'autre.

Exposant :

$$y = x^a$$

$$y^{1/a} = (x^a)^{1/a} \text{ ou } \sqrt[a]{y} = \sqrt[a]{x^a}$$

$$y^{1/a} = x \text{ ou } \sqrt[a]{y} = x$$

Peut-être que cette écriture est encore un peu absconse. Pour simplifier l'écriture, on peut dire que la réciproque d'un exposant est la racine de cet exposant.

$$x^2 \rightarrow \sqrt{x^2}$$

$$x^3 \rightarrow \sqrt[3]{x^3}$$

$$x^n \rightarrow \sqrt[n]{x^n}$$

Et inversement :

$$\sqrt[n]{x} \rightarrow (\sqrt[n]{x})^n$$



Voilà pour l'algorithme de résolution d'équations simples. Et la grande majorité des équations sont des équations simples. Pour les autres, on développera d'autres outils.

Ça serait peut être un bon moment de décrire un exemple...

Exemple d'équation simple

Prenons un exemple d'équation simple – par *simple*, on entend que l'inconnue peut être isolée.

On souhaite faire une bouteille composée d'un cylindre et d'un cône. On sait que le volume doit être de 1 litre (1 dm^3) et que les hauteurs du cône et du cylindre sont égales à 1 *dm*, pour une hauteur totale de 2 *dm*. Quel doit être le rayon ?

Pour répondre à cette question, il faut d'abord connaître les formules pour le volume d'un cône et d'un cylindre. Heureusement, notre prof de maths favori ou, plus probablement, Internet nous dit :

$$V_{\text{cône}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h_{\text{cône}}$$

$$V_{\text{cyl.}} = \pi r^2 h_{\text{cyl.}}$$

Nous savons que le volume entier (cylindre plus cône) doit être égal à 1 dm^3 . On écrit donc :

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h_{\text{cône}} + \pi r^2 h_{\text{cyl.}} = 1$$

Nous connaissons la hauteur du cylindre et du cône – simplement 1 *dm*, donc l'équation se simplifie :

$$\frac{1}{3} \pi r^2 + \pi r^2 = 1$$

Par chance, l'expression peut se simplifier encore. Il ne reste plus qu'à la résoudre :

$$\frac{4}{3} \pi r^2 = 1$$

On divise par quatre et on multiplie par trois les deux côtés :

$$\pi r^2 = \frac{3}{4}$$

On divise les deux côtés par π :

$$r^2 = \frac{3}{4\pi}$$

Et on prend la racine carrée des deux côtés :

$$r = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}$$



Et voilà un exemple d'utilisation d'une équation. En fait, tous les problèmes peuvent être transformés en équation. Une fois l'équation écrite, il ne reste plus qu'à la résoudre pour l'inconnue...

Et si au lieu d'une inconnue, il y en avait deux ?

Systèmes de deux équations

Avec une équation, on peut trouver la valeur d'une inconnue. Pour trouver la valeur de deux inconnues, il faudra deux équations. Pour trois inconnues, trois équations. Quatre équations...

Un système d'équation est donc un ensemble d'équations qui ont des inconnues en commun. La procédure de résolution est assez intuitive :

- Résoudre une des deux équations pour une des deux inconnues
- Mettre l'expression obtenue dans la deuxième équation
- Résoudre la deuxième équation pour la seconde inconnue
- Mettre le résultat dans la première, et résoudre pour la première inconnue

Ce sera peut-être plus clair avec un exemple idiot.

Pour un cours du samedi matin, j'ai acheté 5 pains au chocolat et 3 croissants, et j'ai payé 9,30€. Vous-même avez acheté 2 pains au chocolat et 6 croissants et avez payé 9€. Au moment de faire les comptes, nous nous rendons compte que nous avons oublié le prix des deux viennoiseries.

Qu'à cela ne tienne : traduisons la situation en phrases mathématiques, avec x pour le prix des pains au chocolat, et y pour celui des croissants :

$$5x + 3y = 9.3$$

$$2x + 6y = 9$$

On résout la première équation pour une des deux inconnues (enlever $3y$, diviser par 5) :

$$x = \frac{9.3 - 3y}{5}$$

On met l'expression dans la deuxième équation :

$$2\left(\frac{9.3 - 3y}{5}\right) + 6y = 9$$

On développe et réunit les termes avec y :

$$\frac{18.6}{5} - \frac{6}{5}y + \frac{30}{5}y = 9$$

$$\frac{30}{5}y - \frac{6}{5}y = \frac{45}{5} - \frac{18.6}{5}$$

$$\frac{24}{5}y = \frac{26.4}{5}$$

On résout pour y :

$$y = \frac{26.4}{24} = 1.1$$

On met le résultat dans la première équation :

$$5x + 3(1.1) = 9.3$$

Et on résout pour x :

$$x = \frac{9.3 - 3.3}{5}$$

$$x = \frac{6}{5} = 1.2$$

Le prix des croissants est donc de 1.1€, et celui des pains au chocolat de 1.2€.

Une autre manière de résoudre un système d'équations est de modifier une des équations et de l'ajouter à une autre en sorte qu'une inconnue disparaisse. Encore une fois, ce sera peut-être plus clair par l'exemple (le même que précédemment) :

Nous avons deux équations :

$$5x + 3y = 9.3$$

$$2x + 6y = 9$$

Si je multiplie la première équation par -2 , j'obtiens :

$$-10x - 6y = -18.6$$

$$2x + 6y = 9$$

Comme j'ai fait la même chose au côté gauche et au côté droit, c'est toujours bien la même équation.

Je fais la somme des deux équations ; les termes contenant y disparaissent :

$$-8x = -9.6$$

Et je résous pour x :

$$x = \frac{9.6}{8} = 1.2$$

Je mets ce résultat dans une des deux équations du début, et je résous pour y :

$$5(1.2) + 3y = 9.3$$

$$3y = 9.3 - 6$$

$$y = \frac{3.3}{3} = 1.1$$

Et j'obtiens le même résultat.

Il existe encore une autre manière de résoudre des systèmes d'équations plus complexes à n -inconnues, mais cela implique des objets mathématiques qui s'appellent des matrices. On va garder ça pour plus tard...



Pour le moment, soyons content qu'on puisse facilement trouver les solutions d'un système d'équations à deux inconnues. Parce que maintenant, il est temps de parler du second degré. Et le second degré, c'est pas du premier degré.

Equations du second degré

Avant de nous attaquer aux équations du second degré, attardons-nous sur le cas où l'inconnue est au carré :

$$y = ax^2$$

La solution est simple : il suffit de diviser les deux côtés par a , puis de mettre les deux côtés sous une racine carrée.

$$\frac{y}{a} = x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{y}{a}}$$

Mais ce n'est pas tout à fait vrai. En fait, il existe *deux* solutions pour cette équation.

Prenons un exemple :

$$8 = 2x^2$$

$$x = \sqrt{4} = 2$$

Si je place le résultat dans l'équation de départ, j'obtiens en effet 8 :

$$2(2)^2 = 8$$

Mais j'obtiendrais le même résultat avec -2 :

$$2(-2)^2 = 8$$

Donc, il y a *deux* solutions à cette équation : 2 et -2 . On écrit donc en fait :

$$x = \pm 2$$

Et ceci est vrai pour tous les exposants s'ils sont des chiffres pairs (2,4,6, etc.). On peut en déduire une nouvelle règle générale :

$$\text{Pour } y = ax^{2n}, \text{ la solution est } x = \pm \sqrt[n]{\frac{y}{a}}, \text{ où } n \text{ est un nombre entier.}$$

Cela étant établi, commençons à parler un peu des équations du second degré.

Une équation du second degré est une équation dans laquelle l'inconnue apparaît deux fois : une fois sous la forme de x , et une fois sous la forme de x^2 . Prenons d'abord la forme la plus simple.

$$0 = ax^2 - bx$$

Dans ce cas, on peut séparer les termes de part et d'autre du signe égal :

$$ax^2 = bx$$

On peut diviser les deux côtés par x :

$$ax = b$$

Et résoudre enfin :

$$x = \frac{b}{a}$$

Ce n'était en fait pas si compliqué que ça.

Ça devient un peu plus compliqué s'il y a un terme constant ajouté à tout ça :

$$y = ax^2 + bx$$

En effet, on ne peut plus séparer les termes – en mettre un à gauche du signe égal, l'autre à droite, et ils sont seuls chacun de leur côté. Quoiqu'on fasse, il y aura toujours ce y dans le passage.

Lorsque nous parlerons des dérivées, nous verrons qu'il y a une solution assez simple à ce problème. Mais nous pouvons aussi utiliser un peu de géométrie.

Pour plus tard, je vais écrire cette équation de manière un peu différente :

$$0 = ax^2 + bx + c$$

J'ai changé certaines lettres, mais nous avons bien toujours la même situation : un terme qui multiplie x^2 , un qui multiplie x et une constante.

Divisons tout par a .

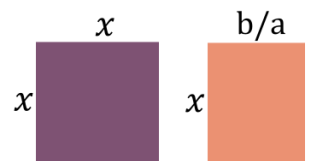
$$0 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

Et passons le dernier terme de l'autre côté du signe égal :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

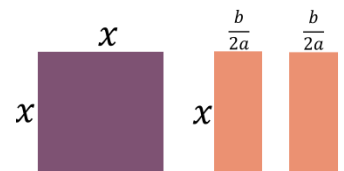
Maintenant, nous pouvons représenter cette situation en utilisant des carrés et des rectangles :

Le premier terme est la surface d'un carré de côté x . Le second terme est la surface d'un rectangle dont un côté est égal à x , l'autre à $\frac{b}{a}$.



Le troisième terme est... une surface négative ? Peu importe pour le moment, on reviendra plus tard sur ce point. Et de toutes façons, je n'ai représenté ici que le côté gauche. Parce qu'une surface négative, je ne sais pas ce que c'est. Ça fait un peu peur, en fait...

Soit. Divisons le rectangle en deux parties égales et repositionnons-les. Ça fait deux petits rectangles de longueur x et de largeur $\frac{b}{2a}$ en plus d'un carré de côté x .

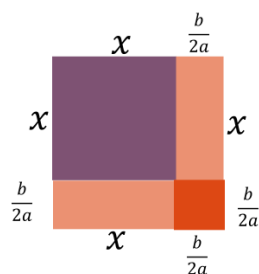
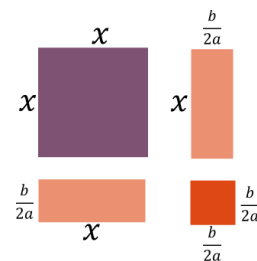


On voit que si on ajoute un petit carré au côté gauche, on obtiendrait un carré complet. Le côté de ce petit carré mesure $\frac{b}{2a}$.

On calcule les aires, et on ajoute celle du petit carré. Pour respecter le signe égal, on ajoute le même carré au côté droit.

$$x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

On remplace alors tout le côté gauche par l'aire du grand carré.



On en profitera pour reconnaître une des identités remarquables dont on a parlé plus tôt...

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

La résolution est alors assez simple : mettre les deux côtés sous une racine carrée, et résoudre pour x ... en prenant bien en compte le fait qu'il pourrait y avoir deux

solutions.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

On peut réécrire tout ça d'une manière plus canonique – les ouvrages de mathématiques aiment utiliser la même forme :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Cette formule est tellement utilisée qu'on lui a donné un nom : la **formule quadratique**. Cela dit, elle est un peu intimidante, donc on a développé une procédure d'application :

1. Calculer le déterminant $\Delta = b^2 - 4ac$; on l'appelle déterminant parce qu'il détermine combien de solutions une équation du second degré a.
2. Si le déterminant est négatif (vous vous rappelez de la surface négative ?), alors il n'existe pas de solution *réelle*. Il existe des solutions *imaginaires*, mais ce sera pour une autre fois...
3. Si le déterminant est supérieur ou égal à 0, alors il existe une ou deux solutions, données par la formule (une fois avec le plus, une fois avec le moins) :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$



A ce stade, vous avez tout ce dont vous avez besoin pour pouvoir résoudre une équation simple, un système d'équations à deux inconnues, ou une équation du second degré. Ce qui reste à faire : pratiquer.

Et quoi de mieux que la géométrie pour pratiquer ?

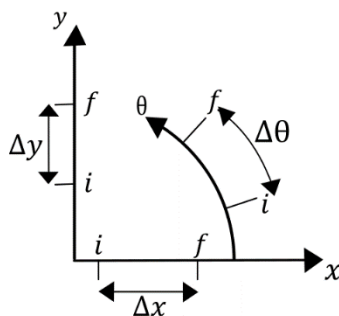
Géométrie dans le plan

Distance, surface ou section

Une distance est la différence entre deux positions. Ces deux positions sont déterminées par un référentiel, c'est-à-dire un espace dont on a déterminé arbitrairement une origine. Par exemple, lorsqu'on mesure quelque chose, on commence classiquement par 0. On a donc déterminé notre origine comme étant égale à 0.

Mais on aurait pu utiliser une autre origine. Par exemple, on peut mesurer une personne, puis mesurer cette même personne avec un chapeau. La hauteur du chapeau sera simplement la différence entre la personne avec le chapeau et la personne sans le chapeau.

Formellement, on écrit une distance comme étant le *delta* entre deux points. Bien sûr, cette distance peut être une longueur, largeur, hauteur... mais aussi un rayon ou même un angle ! En effet, on peut utiliser un système de coordonnées qui s'applique à la situation étudiée :



Coordonnées cartésiennes :

Pour des formes qui peuvent être décrites avec des distances x et y :

$$\text{Longueur } l = \Delta x = x_f - x_i$$

$$\text{Largeur } L = \Delta y = y_f - y_i$$

Coordonnées polaires :

Pour des formes qui peuvent être décrites avec une distance d'un axe de

rotation r et un angle θ :

$$\text{Rayon } r = \Delta r = r_f - r_i$$

$$\text{Angle } \theta = \Delta \theta = \theta_f - \theta_i$$

Dans la pratique, on utilisera rarement le delta des différentes dimensions – généralement, on commence une mesure à 0. Mais il sera important de s'en rappeler en physique, et aussi lorsque nous aborderons les dérivées.

Formes usuelles

Une surface ou section est le produit de deux dimensions qui sont perpendiculaires l'une à l'autre. En coordonnées cartésiennes, cela revient à multiplier une longueur par une largeur.

$$S = l \times L$$

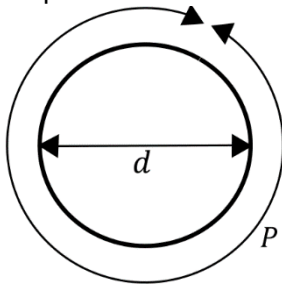
Cas particulier : le carré, pour lequel la longueur est égale à la largeur (un côté c) :

$$S = c^2$$

Un triangle rectangle est un rectangle qu'on a coupé en deux. Sa surface est donc :

$$S = \frac{l \times L}{2}$$

En coordonnées polaires, les choses sont un peu plus avancées. Pour bien comprendre ce qui va suivre, il est peut être nécessaire de revenir sur la définition de π .



Lorsqu'on forme un cercle avec une corde, le ratio de la longueur de la corde par le diamètre du cercle est toujours le même nombre, quelle que soit la taille de la corde : π .

Si je choisis d'exprimer cela sous forme de formule, j'obtiens :

$$\frac{P}{d} = \pi$$

Ce nombre π est donc un nombre sans dimensions. On parlera toutefois de radians lorsqu'on mesurera un angle. Une unité alternative et plus courante est le degré, mais il faut savoir que $\pi = 180^\circ$.

En résolvant cette équation pour le périmètre P , j'obtiens la formule pour le périmètre d'un cercle. Exprimé en termes du rayon r :

$$P = 2\pi r$$

Reconnaissant que 2π est l'angle d'un cercle, on peut en déduire la formule pour calculer un arc de cercle :

$$P_a = \theta r$$

Attention encore : l'angle dans cette formule est en radians, pas en degrés.

La surface étant le produit entre deux dimensions, on devine qu'un arc de disque (plus communément appelé *secteur*) est le produit du rayon avec un arc de cercle, mais attention : on calculerait en fait *deux fois* la surface. Il faut donc tout diviser par deux.

$$S_a = \frac{\theta}{2} r \times r$$

$$S_a = \frac{\theta}{2} r^2$$

Et pour un disque complet, pour lequel l'angle est 2π :

$$S = \frac{2\pi}{2} r^2$$

$$S = \pi r^2$$

Je reviendrai sur ce calcul quand on parlera des intégrales de surface.



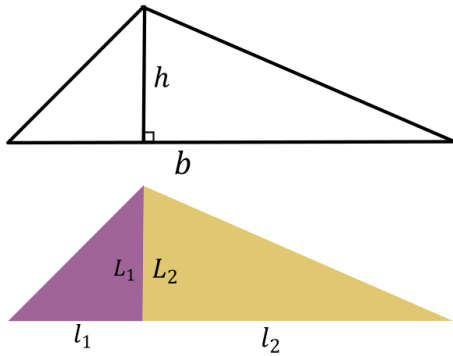
Je n'aurai pas vraiment cassé des briques avec cette leçon mais, d'expérience, rafraîchir la mémoire est une activité quotidienne bénéfique aux élèves (pas aux profs, c'est d'ailleurs pour ça qu'ils sont toujours un peu déprimés...).

Mais dans la vraie vie, les choses ne sont pas faites de triangles ou de ronds. En revanche, on peut décomposer les choses en triangles et en ronds...

Décomposition

Calculer la surface d'un objet plan revient à le décomposer en formes simples : des rectangles, des triangles, des arcs de disques, etc. Commençons avec un exemple simple : le triangle commun.

Un triangle a une base b et une hauteur h . Il peut être décomposé en deux triangles rectangles (avec un angle droit), respectivement de largeur l_1 et l_2 , et de longueur L_1 et L_2 .



Tout de suite, on constate que :

$$L_1 = L_2 = h$$

Les surfaces des deux triangles sont respectivement, comme vu précédemment :

$$S_1 = \frac{l_1 \times h}{2}$$

$$S_2 = \frac{l_2 \times h}{2}$$

La surface du triangle complet est simplement la somme des deux surfaces :

$$S = S_1 + S_2$$

$$S = \frac{l_1 \times h}{2} + \frac{l_2 \times h}{2}$$

On peut factoriser :

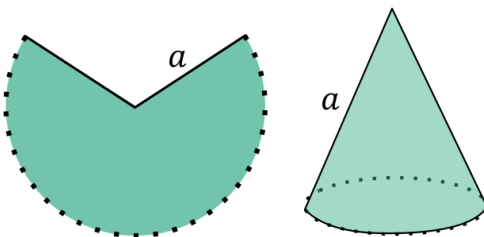
$$S = \frac{h}{2} (l_1 + l_2)$$

Sachant que la base b est simplement la somme des deux largeurs :

$$S = \frac{b \times h}{2}$$

On devine alors que la surface d'un triangle, quel qu'il soit, est toujours donnée par la même formule. Et c'est le cas.

Prenons un autre exemple : la surface d'un cône.



Un cône aplati est simplement le secteur d'un disque dont le rayon est égal à l'apothème du cône – et l'apothème a est l'hypoténuse d'un triangle de base R et de hauteur H . L'arc de cercle est égal au périmètre de la base.

Très bien. Exprimons tout cela avec des équations.

D'abord, la surface d'un secteur :

$$S = \frac{\theta}{2} a^2$$

Ensuite, l'apothème du cône (par Pythagore) :

$$a = \sqrt{R^2 + H^2}$$

Et enfin, l'égalité entre l'arc de cercle et le périmètre :

$$\theta a = 2\pi R$$

Qu'on peut résoudre directement pour θ :

$$\theta = \frac{2\pi R}{a}$$

Tout d'abord, dans la première expression, remplaçons θ à l'aide de la dernière expression :

$$S = \frac{2\pi R}{2a} a^2$$

$$S = \pi R a$$

Ensuite, remplaçons a :

$$S = \pi R \sqrt{R^2 + H^2}$$

Et voilà.

Nous reviendrons sur cette preuve lorsque nous parlerons des intégrales de surface et de volume mais déjà, avec quelques outils simples, on peut trouver des quantités intéressantes.



Décomposer en formes simples, c'est bien, mais on peut aussi décomposer en atomes. Ou en tous cas, en formes infiniment petites. Et ça existe, les mathématiques qui font ça.

Mais d'abord, il va falloir parler de fonctions.

Fonctions : des suites numériques aux dérivées

Suites numériques

Les suites numériques, comme leur nom l'indique, sont des séries de nombres qui se suivent. La manière dont ils se suivent s'appelle la raison, et chaque nombre est un terme de rang $n = 0, 1, 2, \dots$

Nous parlerons ici de deux types de suites numériques : les suites arithmétiques et les suites géométriques.

Suites arithmétiques

Les suites arithmétiques sont des suites dont le terme suivant est égal au terme précédent plus une raison r . On écrit donc :

$$U_{n+1} = U_n + r$$

La raison r peut être n'importe quel nombre, positif ou négatif. S'il est positif, on dira que la suite est croissante ; s'il est négatif, qu'elle est décroissante.

En opérant le calcul de plusieurs termes, on peut discerner un motif :

$$U_0 = U_0$$

$$U_1 = U_0 + r$$

$$U_2 = U_1 + r = U_0 + 2r$$

$$U_3 = U_2 + r = U_0 + 3r$$

On en déduit une fonction permettant de trouver n'importe quel terme U de n'importe quel rang n :

$$U(n) = U_0 + nr$$

Attention, j'appelle cette expression une fonction, mais ce n'en est pas vraiment une. Elle ne fonctionne que si n est un nombre entier, et c'est là la différence. Mais peu importe...

La somme d'une suite arithmétique est la somme S des nombres constituant une suite définie sur un intervalle. On peut la calculer manuellement, ou utiliser une formule dont voici la preuve détaillée, découverte par [Carl Friedrich Gauss](#) qui, selon la légende, l'avait utilisée la première fois en réponse à un exercice long et fastidieux que lui avait donné son prof de maths :

$$S = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

$$S = U_0 + (U_0 + r) + (U_0 + 2r) + (U_0 + 3r) + \dots + (U_0 + nr)$$

$$S = (n+1)U_0 + r(1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n)$$

En se concentrant sur le terme que multiplie r , on définit la somme des premiers entiers s jusqu'au dernier :

$$s = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

On retourne cette équation (le premier terme en dernier, et inversement) :

$$s = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1$$

On fait la somme des deux équations :

$$2s = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) + (n+1)$$

On en déduit que le double de la somme des premiers entiers est égal à $n+1$ un nombre n de fois.

$$2s = n(n + 1)$$

On résout pour s :

$$s = n \frac{n + 1}{2}$$

Et on réintègre ce résultat à notre expression pour la somme d'une suite arithmétique :

$$S = (n + 1)U_0 + r \left(n \frac{n + 1}{2} \right)$$

On peut réécrire cette expression pour la clarifier :

$$S = (n + 1)U_0 + rn \frac{n + 1}{2}$$

$$S = (n + 1) \frac{2U_0 + rn}{2}$$

$$S = (n + 1) \frac{U_0 + U_0 + rn}{2}$$

Et comme $U_n = U_0 + rn$:

$$S = (n + 1) \frac{U_0 + U_n}{2}$$

Cette démonstration n'a rien de simple – il a fallu le génie de Gauss pour imaginer représenter les derniers termes sous la forme $n - 1$, puis de faire la somme des deux expressions, etc. Je l'ajoute ici pour montrer que les mathématiques demandent d'abord et avant tout de la rigueur et de l'imagination. Une idée à conserver pour plus tard...

Suites géométriques

Les suites géométriques sont des suites dont le terme suivant U_{n+1} est égal au terme précédent U_n multiplié par une raison q .

$$U_{n+1} = U_n \times q$$

La raison q peut être n'importe quel nombre positif, mais pas un nombre négatif. Si la raison est supérieure à 1, la suite est croissante. Si elle est comprise entre 0 et 1, elle est décroissante.

En opérant le calcul de quelques premiers termes, on peut discerner un motif :

$$U_0 = U_0$$

$$U_1 = U_0 \times q$$

$$U_2 = U_1 \times q = U_0 \times q \times q = U_0 \times q^2$$

$$U_3 = U_2 \times q = U_0 \times q \times q \times q = U_0 \times q^3$$

On en déduit une fonction permettant de calculer n'importe quel terme de n'importe quel rang n :

$$U(n) = U_0 q^n$$

La somme d'une suite géométrique est la somme S des termes d'une suite géométrique sur un intervalle de 0 à n . On peut la calculer manuellement, ou utiliser une formule dont voici la preuve détaillée :

$$S = U_0 + U_0q + U_0q^2 + \dots + U_0q^{n-1} + U_0q^n$$

On multiplie cette somme par la raison q :

$$qS = U_0q + U_0q^2 + U_0q^3 + \dots + U_0q^n + U_0q^{n+1}$$

On calcule la différence entre les deux ; tous les termes du milieu s'annulent :

$$S - qS = U_0 - U_0q^{n+1}$$

On factorise et on résout pour S :

$$S(1 - q) = U_0(1 - q^{n+1})$$

$$S = U_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

S'il existe d'autres types de suites numériques, ces deux suites nous permettent d'introduire le concept de fonction. En effet, par deux fois nous avons vu qu'il était possible de trouver n'importe quel terme de n'importe quel rang simplement en discernant un motif. Une fonction fait cela.



J'avais dit que j'allais parler de fonction dans cet épisode, mais j'ai parlé de suites numériques. Pour moi, une suite numérique est une introduction aux fonctions. Commençons par celles qui sont simples.

Fonctions simples

Une fonction est une machine mathématique qui prend un nombre en entrée et sort un autre nombre en sortie. En langage mathématique, on dit qu'elle prend une valeur x et restitue une image $f(x)$.

Il est important de noter qu'une fonction n'est pas *directement* similaire à une équation. En effet, une équation donne un résultat y pour une variable x . Une fonction donne un *ensemble* d'images pour un ensemble de variables. C'est une subtilité qu'il est important de garder en tête afin d'opérer la transition de fonction à équation sans perdre le fil.

Si l'ensemble de variables peut être infini, on précisera souvent sur quel intervalle $f(x)$ est défini. On écrira alors :

$$f(x) \text{ où } x \in [x_i; x_f]$$

Le symbole $\in$ veut dire *appartient*, et les crochets indiquent un intervalle entre une valeur de x initiale et une valeur x finale. Traduit en français : la fonction est définie pour des valeurs appartenant à un intervalle.

On notera qu'on épelle $f(x)$ *f de x*, c'est-à-dire *fonction f de la variable x*.

Nous étudierons cinq fonctions simples, qui sont toutes écrites de la même manière :

$$f(x) = ax^n + b$$

Image et antécédent

Lorsqu'on calcule l'**image** d'une variable x_a , il est usuel d'écrire $f(x_a)$ pour le résultat, ou même de le remplacer par y_a .

Pourquoi ? A cause des graphiques.

La représentation graphique est une courbe qu'on appellera f ou $f(x)$ dans un espace en deux dimensions x et y . Il n'existe donc pas une *valeur* particulière pour $f(x)$: c'est un ensemble de valeurs. En revanche, pour chaque valeur de x , il existe une valeur y qui lui correspond, et qui est donnée par la fonction.

Clarifions ce point par l'exemple :

J'ai une fonction $f(x)$ et une variable en particulier que j'appellerai x_a . Lorsque je calcule l'image, j'écris :

$$f(x_a) = ax_a^n + b$$

Cette image que j'obtiens correspond à une valeur sur l'axe y , que j'appellerai y_a . J'écris alors :

$$f(x_a) = y_a$$

A la fin, j'écirai directement :

$$y_a = ax_a^n + b$$

Et j'ai transformé la fonction, une machine à donner un nombre infini de valeurs, en équation, une expression qui lie un nombre spécifique x_a à un autre nombre spécifique y_a .

Si c'est cette valeur y_a que je connais, je peux calculer **l'antécédent** – la valeur de x qui donne cette image en particulier. Il s'agit alors d'une simple équation à résoudre :

$$x_a = \left(\frac{y_n - b}{a} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Ou, écrit autrement :

$$x_a = \sqrt[n]{\frac{y_n - b}{a}}$$

Cinq fonctions simples :

Fonction affine :

$$f(x) = ax + b$$

Une fonction affine ressemble à une ligne droite. On notera :

- que l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire $f(0)$, est égale à b
- que si $a < 0$, la courbe est décroissante ; que si $a > 0$, la courbe est croissante

Fonction carrée :

$$f(x) = ax^2 + b$$

Une fonction carrée ressemble à une parabole. On notera :

- que l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire $f(0)$, est égale à b
- que si $a < 0$, la parabole est ouverte vers le bas ; que si $a > 0$, la parabole est ouverte vers le haut

On dit de la fonction carrée qu'elle est paire, c'est-à-dire que $f(x) = f(-x)$.

Fonction cube :

$$f(x) = ax^3 + b$$

Une fonction cube ressemble à deux paraboles, une positive, l'autre négative. On notera :

- que l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire $f(0)$, est égale à b
- que si $a < 0$, la courbe vient de l'infini négatif et va vers l'infini positif ; que si $a > 0$, la courbe vient de l'infini positif et va vers l'infini négatif

On dit de la fonction cube qu'elle est impaire, c'est-à-dire que $f(x) \neq f(-x)$.

Fonction racine :

$$f(x) = ax^{\frac{1}{2}} + b$$

$$f(x) = a\sqrt{x} + b$$

Une fonction racine... ne ressemble à rien de particulier. On notera :

- que l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire $f(0)$, est égale à b
- que cette fonction ne prend pas de x négatif
- que si $a < 0$, la courbe est décroissante ; que si $a > 0$, la courbe est croissante

Fonction inverse :

$$f(x) = ax^{-1} + b$$

$$f(x) = \frac{a}{x} + b$$

Une fonction inverse semble créer deux courbes différentes séparées par l'axe des ordonnées. On notera :

- que cette fonction n'est pas définie à l'origine
- que b est la valeur vers laquelle cette fonction tend vers les infinis – on l'appelle alors **l'asymptote**, la valeur que la fonction ne dépasse jamais.



Voilà pour la présentation des fonctions simples. Sachez qu'il existe des vidéos de la [fonction dance](#) qui aide à se rappeler des différentes formes. Ce sera important pour plus tard.

On a appris à utiliser une fonction, mais peut-on trouver une fonction comme on trouve une inconnue ?

Trouver a et b

Il peut arriver qu'on ait des informations sur une fonction, mais pas la fonction elle-même. Il est alors nécessaire de trouver la fonction. Oui, ça peut sembler évident, mais il est bon de le rappeler à certains : en général, ce qu'on cherche, c'est ce qu'on ne connaît pas...

Trouver la fonction revient à identifier n et calculer a et b .

Pour identifier n , il suffit de savoir la forme de la fonction : affine, carrée, cube, etc. C'est notre premier élément d'information.

Pour trouver a et b , il faut mettre en place un système d'équations. En effet, s'il y a deux inconnues, il faut deux équations.

Ces deux équations nécessitent les coordonnées de deux points par lesquels passe la courbe représentant la fonction. Pour rappel : les coordonnées d'un point sont un set de deux nombres entre parenthèses, séparés par un point-virgule.

Supposons les coordonnées d'un point A et d'un point B :

$$A: (x_A; y_A)$$

$$B: (x_B; y_B)$$

On intègre ces coordonnées dans la fonction :

$$y_A = ax_A^n + b$$

$$y_B = ax_B^n + b$$

On peut résoudre la première équation pour b :

$$b = y_A - ax_A^n$$

... et mettre le résultat dans la deuxième équation :

$$y_B = ax_B^n + y_A - ax_A^n$$

Il ne reste plus qu'à résoudre pour a :

$$ax_B^n - ax_A^n = y_B - y_A$$

Factoriser a , et résoudre :

$$a(x_B^n - x_A^n) = y_B - y_A$$

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B^n - x_A^n}$$

Pour trouver b , il suffit d'insérer ce qu'on a trouvé dans la première ou la seconde équation, et de résoudre pour b :

$$b = y_A - \left(\frac{y_B - y_A}{x_B^n - x_A^n} \right) x_A^n \text{ ou } b = y_B - \left(\frac{y_B - y_A}{x_B^n - x_A^n} \right) x_B^n$$

Incidentement, on a le choix entre deux équations pour trouver b . Même si ce n'est pas nécessaire, il est malin de calculer les deux : si on obtient deux fois le même résultat, on a tout juste. Sinon : on a dû commettre une erreur quelque part, et il faut la trouver...



Voilà pour comment trouver une fonction. Vous aurez peut-être remarqué que ce problème était en fait un simple système d'équations...

Mais après les fonctions simples viennent les... polynômes. Et les logarithmes. Des fonctions moins simples...

Polynômes

Un polynôme est une somme de fonctions. Nous nous intéresserons ici à deux types de polynômes : de degré 2 et de degré 3

Polynôme de degré 2

Un polynôme de degré 2 est une fonction qui a la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

C'est donc la somme d'une fonction carrée et d'une fonction affine. On notera :

- que si $a < 0$, la courbe est une parabole ouverte vers le bas
- que si $a > 0$, la courbe est une parabole ouverte vers le haut
- que si $b < 0$, la courbe est décalée vers la droite
- que si $b > 0$, la courbe est décalée vers la gauche
- que c est l'ordonnée à l'origine

Polynôme de degré 3

Un polynôme de degré 3 est une fonction qui a la forme :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Il s'agit donc de la somme d'une fonction cube, une fonction carrée et une fonction affine.

Comme les fonctions dont il est composé, l'ordonnée à l'origine est donnée par la constante (ici, d). Outre cela, le comportement d'un polynôme de degré 3 est mieux compris lorsqu'expérimenté par soi-même...

Notons tout de même trois points d'intérêt :

- le minimum local
- le maximum local
- le point d'inflexion, localisé pile entre les extrema locaux (minimum et maximum local)

Je n'ai pas grand-chose de plus à dire sur les polynômes pour le moment. Il va falloir patienter jusqu'à ce qu'on parle de dérivées.

Fonctions logarithmiques et exponentielles

Le logarithme de base n d'un nombre est le nombre de fois que n est multiplié par lui-même pour donner ce nombre. Par exemple, le logarithme de base 10 du nombre 1000 est 3 :

$$10 \times 10 \times 10 = 1000$$

$$10^3 = 1000$$

$$\log_{10}(1000) = 3$$

On peut d'ores et déjà deviner la réciproque d'un logarithme et d'un exposant :

$$\log_n(n^x) = x$$

$$n^{\log_n(x)} = x$$

Le logarithme naturel

Outre les logarithmes de base 10, il existe potentiellement une infinité de logarithmes. Il y en a un, cependant, qui retient l'attention : le logarithme naturel de base e .

$$\ln(e^x) = x$$

$$e^{\ln(x)} = x$$

Le nombre de Euler e est un nombre irrationnel souvent approximé à 2,71828. Ce nombre a des propriétés fascinantes, mais pour le moment, nous nous contenterons de son usage pour résoudre certaines équations.

Il existe des tables logarithmiques qui listent le logarithme de nombres. A l'âge des calculatrices et des ordinateurs, ces tables sont devenues obsolètes, mais leur usage s'appuie sur des propriétés des logarithmes qui elles sont toujours utiles.

$$\ln(A \times B) = \ln(A) + \ln(B)$$

$$\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln(A) - \ln(B)$$

Similairement, on déduira :

$$e^A e^B = e^{A+B}$$

$$\frac{e^A}{e^B} = e^{A-B}$$

Cette dernière propriété, il faut le noter, s'étend à n'importe quel nombre à la place de e .

On notera enfin la propriété qui va nous être utile très vite :

$$\ln(A^n) = n \ln(A)$$

Fonction logarithmique, fonction exponentielle

Une fonction logarithmique est une fonction de la forme suivante :

$$f(x) = a \ln(x) + b$$

On notera que :

- cette fonction n'est pas définie à $x \leq 0$ – en fait, elle va vers l'infini quand elle approche zéro.
- cette fonction est égale b lorsque $x = 1$

Une fonction exponentielle est une fonction de la forme suivante :

$$f(x) = ae^x + b$$

On notera que :

- cette fonction est égale à $a + b$ lorsque $x = 0$.
- elle tend vers b quand x tend vers l'infini négatif

Retour sur les suites géométriques

Nous avons vu que, pour trouver un terme de rang n d'une suite géométrique, il suffit d'appliquer la fonction :

$$U(n) = U_0 q^n$$

Où q est la raison de la suite géométrique et U_0 son premier terme.

Mais comment savoir à quel rang un terme se trouve ? C'est là que la dernière propriété des logarithmes que j'ai mentionnée devient utile.

Prenons un exemple un peu grotesque. Chaque fois que je plie une feuille de papier, je double son épaisseur. Doubler l'épaisseur d'une feuille de papier revient donc à créer une suite géométrique dont le premier terme est égal à l'épaisseur de la feuille de papier, et la raison q est 2. Si on admet que l'épaisseur d'une feuille de papier est de 0.2 mm (0.0002 m) :

$$U(n) = 0.0002 \times 2^n$$

Admettant qu'on ait une très grande feuille de papier, combien de fois faudrait-il la plier pour atteindre une épaisseur de un mètre ?

Nous avons affaire à une fonction exponentielle – la variable est dans l'exposant sur un nombre. Nous avons vu que la réciproque de l'exponentielle est le logarithme. Ecrivons l'équation :

$$1 = 0.0002 \times 2^n$$

On peut commencer à la résoudre : la réciproque de la multiplication est la division :

$$\frac{1}{0.0002} = 2^n$$

Et, comme on vient de l'apprendre, la réciproque de l'exponentielle est le logarithme naturel. On met donc les deux côtés dans un logarithme naturel :

$$\ln\left(\frac{1}{0.0002}\right) = \ln(2^n)$$

La dernière propriété des logarithmes nous permet d'écrire :

$$\ln\left(\frac{1}{0.0002}\right) = n \ln(2)$$

Ne reste plus qu'à diviser les deux côtés par $\ln(2)$ et de mettra l'autre côté de l'équation dans une calculatrice :

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{0.0002}\right)}{\ln(2)} = n$$

$$n \approx 12$$

Plus intéressant peut être : et si on remplaçait le mètre par la distance entre la Terre et la Lune (384 400 000m) ?

$$\frac{\ln\left(\frac{384\,400\,000}{0.0002}\right)}{\ln(2)} = n$$

$$n \approx 41$$

Il suffirait de 41 pliages pour obtenir une épaisseur égale à la distance entre la Terre et la Lune. A supposer que la feuille soit assez grande...



Voilà pour les polynômes et les logarithmes. Oh, on va en reparler, c'est sûr, mais avant ça, je voudrais vous introduire aux dérivées.

Dérivées et points d'intérêts

On a vu les fonctions, ce qu'on peut faire avec les fonctions, et même comment trouver certaines fonctions simples.

Mais comment peut-on analyser une fonction ?

La dérivée d'une fonction est une fonction qui décrit son évolution.

(...)

Ce n'est pas très éclairant, ça...

La dérivée f' d'une fonction f est une fonction qui décrit l'évolution de la fonction f .

Plus précis, et cela inclut la notation f prime, mais pas plus clair...

Prenons l'exemple d'une pente. Sur la route, une pente de 7% signifie une pente raide, et que si on la descend il faut utiliser le frein moteur, ou que si on la monte il ne faut pas rester derrière un camion.

Le 7% signifie que pour 100 mètres parcourus à l'horizontale, 7 mètres sont parcourus à la verticale.

Eh bien, la dérivée d'une fonction, c'est l'estimation de la pente de cette fonction à chaque valeur de x . Et de toutes ces estimations on fait une nouvelle fonction qu'on appellera f' .

Je pense que c'est un peu plus clair. Ça le sera peut-être plus avec des exemples.

La dérivée d'une constante est 0 : une constante, par définition, ne change pas, n'a pas de pente.

$$f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0$$

Noter qu'on disait *f* de *x* pour la fonction ; pour la dérivée, on dira *f* prime de *x*.

La dérivée d'une fonction linéaire (passant par l'origine) est simplement la pente de la fonction :

$$f(x) = ax \rightarrow f'(x) = a$$

Pour une fonction carrée, cela devient un peu plus compliqué : la pente n'arrête pas de changer. On peut faire l'approximation de calculer la pente entre des paires de points très rapprochées tout le long de la courbe. On obtient alors une collection de points qui forme une fonction affine. On peut en trouver facilement la forme :

$$f(x) = ax^2 \rightarrow f'(x) = 2ax$$

On note alors à nouveau un motif : la dérivée de ax , c'est a . La dérivée de ax^2 , c'est $2ax$. On devine que la dérivée de ax^3 , c'est $3ax^2$... ?

Bingo.

On en déduit une formule permettant de trouver la dérivée d'une fonction simple ou d'un polynôme (après tout, un polynôme n'est jamais qu'une somme de fonction simples) :

$$\text{Pour } f(x) = ax^n, f'(x) = nax^{n-1}$$

On pourrait passer à un moment pour construire une liste des dérivées de toutes les fonctions simples (affine, carrée, cubique, etc.), mais ce serait fastidieux et, à la fin et à mon avis, inutile : mieux vaut appliquer cette formule. Mais n'allez pas croire qu'il serait complètement inutile de vérifier :

- sur une feuille de calculs, dresser le tableau de valeurs d'une fonction avec un petit pas (au maximum 0.1)
- dans une colonne, calculer la pente entre les deux premiers points de la fonction ; pour rappel, la formule pour calculer la pente d'une fonction de type $f(x) = ax^m$:

$$a = \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1}^m - x_n^m}$$

Oui, j'ai dû utiliser la lettre m pour l'exposant parce que la lettre n était prise pour le rang...

- copier la formule jusqu'à l'avant dernière cellule de la fonction
- faire un graphique, et deviner quelle fonction décrit la dérivée

A coup sûr, la fonction sera donnée par la formule que j'ai donnée. Si ce n'était pas le cas, en tant que prof de maths, je serais bien embêté...

Intéressons-nous plutôt à ce à quoi cela pourrait bien servir, une dérivée.

La réponse est dans comment on l'a trouvée : c'est une mesure de l'évolution de la fonction. Si la dérivée est négative, la fonction décroît ; si elle est positive, elle croît.

Et si la dérivée est égale à 0 en un point x , alors la fonction atteint un extremum à ce point.

La dérivée permet donc de trouver les coordonnées de l'extremum d'une fonction.

Tout cela serait très bien, si seulement on savait ce que c'était, un extremum.

Un extremum est un maximum ou un minimum.

Maintenant, on sait.

Prenons un exemple.

On a un polynôme du second degré :

$$f(x) = -0.2x^2 - 10x - 50$$

On a compris que la dérivée nous permettrait de trouver les coordonnées de son extremum. On trouve donc la dérivée :

$$f'(x) = (2)(-0.2)x^{2-1} - (1)(10)x^{1-1} - (0)(50)x^{0-1}$$

$$f'(x) = -0.4x - 10$$

Nous savons que là où la dérivée est égale à zéro, cela correspond à la coordonnée horizontale de son extremum. On égalise la fonction à zéro, et on résout pour x :

$$0 = -0.4x - 10$$

$$x = -\frac{10}{0.4} = -25$$

La coordonnée x de l'extremum est donc égale à -25. Pour trouver sa coordonnée y , il suffit d'insérer ce résultat dans la fonction originale :

$$f(-25) = -0.2(-25)^2 - 10(-25) - 50$$

$$f(-25) = 75$$

Les coordonnées de l'extremum de cette fonction sont donc :

$$(-25; 75)$$

Pour savoir s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum, il suffit de regarder le signe de a : s'il est négatif, la parabole est ouverte vers le bas. Il s'agit donc ici d'un maximum.

L'utilité des dérivées et de leurs réciproques, les primitives, va bien plus loin que la découverte de points d'intérêts comme le ou les extrema d'une fonction. Par exemple, elles peuvent servir à (re)découvrir la formule quadratique.

On note que l'extremum d'un polynôme du second degré se trouve à une distance égale à $\pm\beta$ de ses racines – là où la courbe croise l'axe des abscisses. Si on pouvait trouver la valeur de β , on pourrait trouver une formule qui nous permettrait de calculer les coordonnées de ces racines.

Tout d'abord, trouvons une formule pour l'extremum, et appelons sa coordonnée horizontale h :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$0 = 2ah + b$$

$$h = -\frac{b}{2a}$$

La coordonnée verticale k est obtenue simplement en intégrant h dans la fonction originale :

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

Mais ce qui nous intéresse, c'est β . Prenons le cas où on ajoute β :

$$f\left(-\frac{b}{2a} + \beta\right) = a\left(-\frac{b}{2a} + \beta\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a} + \beta\right) + c$$

Et nous savons qu'à $h + \beta$, la fonction, croisant l'axe des abscisses, est égale à zéro :

$$0 = a\left(-\frac{b}{2a} + \beta\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a} + \beta\right) + c$$

Développons :

$$0 = a\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b\beta}{a} + \beta^2\right) - \frac{b^2}{2a} + b\beta + c$$

$$0 = \frac{b^2}{4a} - b\beta + a\beta^2 - \frac{b^2}{2a} + b\beta + c$$

Les choses se simplifient, des termes s'annulent :

$$0 = \frac{b^2}{4a} + a\beta^2 - \frac{2b^2}{4a} + c$$

Et se simplifient encore...

$$0 = a\beta^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

On peut enfin résoudre pour β :

$$a\beta^2 = \frac{b^2}{4a} - c$$

Qu'on peut réécrire :

$$a\beta^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

On finit de résoudre et on simplifie encore :

$$\beta^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Pour trouver l'autre racine, il suffit de soustraire β . La formule quadratique est donc :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ce qui nous fait une deuxième preuve de la formule quadratique (la première était dans la section sur les équations du second degré).

C'est sympa, les dérivées.



Et c'est déjà pas mal, tout ça. Être capable de trouver le point le plus haut ou le plus bas d'une courbe sans avoir à la dessiner, c'est pratique. Et pour certains problèmes, ça va bien plus loin que ça.

Notamment en géométrie. Mais avant d'en parler, je dois revenir sur la trigonométrie.

Vecteurs et trigonométrie

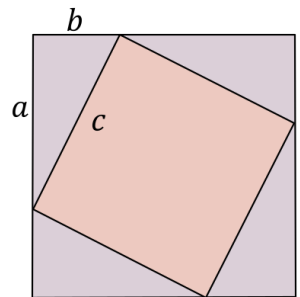
Pythagore

Le théorème de Pythagore est suffisamment connu pour qu'on puisse se passer d'une explication.

Pourtant, je vais prendre le temps de l'expliquer.

Imaginez deux carrés. Le plus petit est dans le plus grand mais penché, en sorte de former quatre triangles rectangles donc l'hypoténuse est égale au côté du plus petit des carrés.

Le côté du plus petit carré est noté c ; les triangles, tous identiques, ont une base a et une hauteur b .



L'aire du grand carré est égale à l'aire du petit carré et des quatre triangles.

$$c^2 + 4 \frac{ab}{2}$$

$$c^2 + 2ab$$

Mais l'aire du grand carré est aussi égale au carré d'un de ses côtés.

$$(a + b)^2$$

Les deux expressions étant égales, on les égalise.

$$c^2 + 2ab = (a + b)^2$$

On développe :

$$c^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2$$

Et on résout pour c ; les termes $2ab$ s'annulent :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Le carré de l'hypoténuse c est égal à la somme des carrés de la base et de la hauteur d'un triangle rectangle. Nous avons prouvé Pythagore.

On en déduit les formules pour calculer le côté d'un triangle rectangle à partir des deux autres :

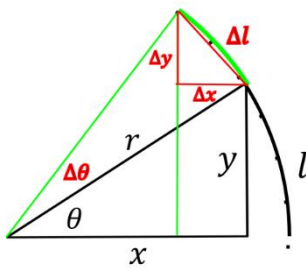
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Sinus et cosinus

Un cercle peut être vu comme une collection de triangles dont l'hypoténuse est égale au rayon du cercle, et dont la base et la hauteur varient avec l'angle.

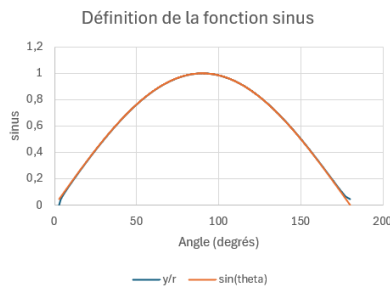


Pour toute valeur de x on sait de Pythagore que $y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Toujours en utilisant Pythagore, on peut faire l'approximation, pour des petits changements de x et de y , de l'arc de cercle l comme étant égal à $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

En ajoutant ces petites longueurs l les unes aux autres, on obtient un cercle complet. En divisant par r , comme $l = \theta r$, on obtient l'angle.

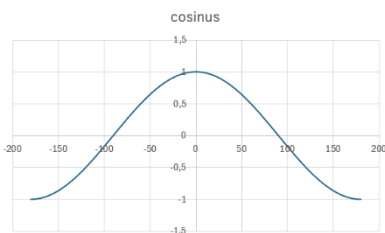
J'ai simulé ce que je viens de décrire sur une feuille de calculs ; calculé $y(x)$, la valeur de Δl pour chaque écart Δx ; fait la somme des Δl pour chaque valeur de x et divisé par r pour obtenir l'angle ; et enfin calculé, pour chaque angle θ , le ratio de y sur l'hypoténuse r . J'ai fait un graphique de la fonction de θ ainsi trouvé, et comparé avec...



On appellera $\sin(\theta)$ le ratio de la hauteur d'un triangle rectangle (le côté opposé à l'angle) avec son hypoténuse.

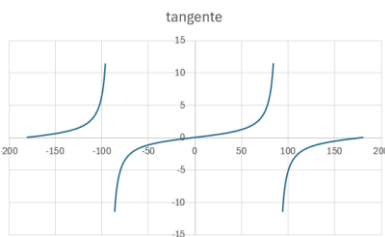
$$\sin(\theta) = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$$

Comme on peut le voir, le ratio de l'opposé sur l'hypoténuse renvoie toujours les mêmes valeurs, quelle que soit l'hypoténuse. Et mon approximation de cette fonction de θ fonctionne plutôt bien.



On peut comparer ensuite l'angle avec le ratio de la base avec le rayon. Là aussi, on obtient toujours les mêmes valeurs, et quel que soit le rayon. On appellera $\cos(\theta)$ le ratio de la base d'un triangle rectangle (le côté adjacent à l'angle) avec son hypoténuse.

$$\cos(\theta) = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$



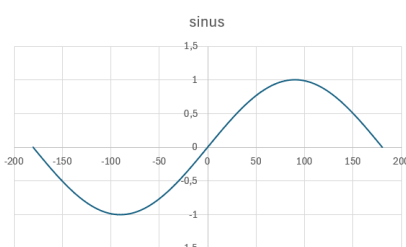
Et enfin, parce que jamais deux sans trois, on appellera $\tan(\theta)$ le ratio du sinus avec le cosinus d'un angle ou, plus directement, le ratio de la hauteur d'un triangle sur sa base.

$$\tan(\theta) = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

Incidemment, on se rendra compte que la tangente d'un angle est la même chose que la pente d'une courbe en un point : le ratio de la distance verticale parcourue sur la distance horizontale parcourue.

Fort heureusement, on n'a pas besoin de calculer la longueur d'un arc de cercle chaque fois qu'on souhaite calculer un des côtés d'un triangle en utilisant l'angle : les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente sont programmées dans toutes les bonnes calculatrices et les feuilles de calculs qui se respectent.

Car ce sont des fonctions : des machines qui, lorsqu'on leur donne un nombre, sortent un autre nombre. **L'argument** – le type de nombre qu'on donne aux fonctions – d'une fonction trigonométrique est un angle. Le nombre qui en sort est, comme on l'a vu, le ratio de deux côtés d'un triangle rectangle.



Fonctions sinus

La fonction sinus est une fonction trigonométrique. A la différence des autres fonctions qu'on a vu jusqu'à maintenant, elle se répète – on dit qu'elle est périodique. On notera :

- qu'elle est égale à zéro à l'origine et à $\pm 180^\circ$ (π)

- qu'elle atteint un extremum à $\pm 90^\circ$ ($\pm \frac{\pi}{2}$)

La réciproque de la fonction sinus, notée $\sin^{-1}(x)$, s'appelle arc sinus.

Fonction cosinus

Une autre fonction trigonométrique, la fonction cosinus est elle aussi périodique. On notera :

- qu'elle atteint un maximum à l'origine et à $\pm 180^\circ$
- qu'elle est égale à zéro à $\pm 90^\circ$

La réciproque de la fonction cosinus, notée $\cos^{-1}(x)$, s'appelle arc cosinus.

Fonction tangente

La fonction tangente, troisième des fonctions trigonométriques de base, est une fonction, vous l'aurez deviné, périodique. On notera :

- qu'elle est égale à zéro à l'origine
- qu'elle est indéfinie à $\pm 90^\circ$

La réciproque de la tangente, notée $\tan^{-1}(x)$, s'appelle arc tangente.

Les côtés d'un triangle rectangle

Une première utilisation des fonctions trigonométriques est dans le calcul des angles et des côtés d'un triangle rectangle. Cela peut sembler limité, jusqu'à ce qu'on se rende compte que beaucoup de formes peuvent être ramenées à des triangles rectangles. Et la deuxième partie de ce chapitre est sur les vecteurs – les fonctions trigonométriques seront là aussi très utiles.

Supposons que nous connaissons un angle et l'hypoténuse d'un triangle rectangle. Avec ces informations et les définitions des fonctions trigonométriques, on peut calculer :

- l'adjacente à l'angle :

$$adj = hyp \cos(\theta)$$

- l'opposée à l'angle :

$$opp = hyp \sin(\theta)$$

Si vous connaissez l'angle et l'opposée à cet angle et que c'est l'adjacente que vous recherchez, la fonction tangente devient utile :

$$adj = opp \tan(\theta)$$

A ce stade, vous pouvez deviner comment obtenir un des côtés à partir de l'angle et d'un seul des côtés : résoudre pour l'inconnue.

Enfin, si c'est un des angles du triangle que vous recherchez, vous n'aurez que l'embarras du choix parmi les réciproques des fonctions trigonométriques :

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{opp}{hyp}\right)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{adj}{hyp}\right)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{opp}{adj}\right)$$

Il y a beaucoup d'identités trigonométriques – vraiment beaucoup – dont certaines que nous verrons au fur et à mesure des besoins. Notons-en quelques-unes dès maintenant :

Supposons un triangle rectangle donc l'hypoténuse est égale à 1. L'adjacente à l'angle est donc simplement $\cos(\theta)$ et l'opposée $\sin(\theta)$. Par Pythagore :

$$\sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Noter au passage comment on écrit le carré d'une fonction trigonométrique : entre la fonction et son argument.

En regardant une représentation graphique des fonctions sinus et cosinus, on notera aussi que :

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

Enfin, toujours en comparant la représentation graphique des fonctions sinus et cosinus, on notera que la fonction cosinus est identique à la fonction sinus – juste décalée le long de l'axe horizontale, de 90° ($\frac{\pi}{2}$). On en déduit :

$$\cos(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin(\theta) = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

Noter qu'on appelle cet angle de décalage *déphasage*.



Ouf. C'est tout ce que j'avais à dire sur la trigonométrie pour le moment, et c'était déjà pas mal. A l'occasion, il faudra que je revienne sur certains points, mais ça devrait suffire pour le moment. Pour le moment, appliquons tout ça aux vecteurs.

Vecteurs dans le plan

Dans un espace en deux dimensions, un vecteur est représenté par une flèche qui pointe dans une direction. Ses coordonnées, car il y en a deux, sont respectivement le déplacement horizontal et le déplacement vertical.

$$\vec{v} = (\Delta x; \Delta y)$$

Un vecteur est donc une quantité mathématique qui contient trois informations :

- une norme ou magnitude – une longueur
- une direction (horizontal, vertical, et tout entre les deux)
- un sens (vers un côté de la direction ou vers l'autre)

Le sens et la direction d'un vecteur sont contenus dans l'angle du vecteur, qu'on trouvera explicitement grâce à la réciproque de la fonction tangente.

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

La norme, ou longueur, d'un vecteur peut être trouvée en utilisant Pythagore :

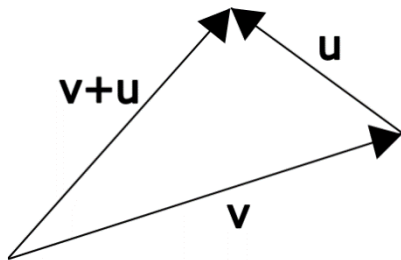
$$|\vec{v}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

On note la norme d'un vecteur avec une ou deux paires de barres verticales :

$$|\vec{v}| \text{ ou } ||\vec{v}||$$

Pour des raisons pratiques, j'utiliserai la première représentation.

Comme pour tout objet mathématique, on peut appliquer des opérations aux vecteurs :



- Addition et soustraction :

$$\vec{v} \pm \vec{u} = (v_x \pm u_x; v_y \pm u_y)$$

L'addition de deux vecteurs donne un troisième vecteur.

- Multiplication par un scalaire (un nombre qui n'est pas un vecteur) :

$$k\vec{v} = (kv_x; kv_y)$$

- Produit scalaire :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_x \times u_x + v_y \times u_y$$

Le produit scalaire entre deux vecteurs donne un scalaire.

- Produit vectoriel (surface entre deux vecteurs) :

$$\vec{v} \times \vec{u} = v_x u_y - v_y u_x$$

Nous reparlerons dans le détail du produit scalaire et du produit vectoriel dans le chapitre sur les matrices.



Oh, oui, comme on va en parler à nouveau, des vecteurs. Mais dans un premier temps, ce petit cours suffira pour résoudre pas mal de problèmes.

Continuons avec quelques généralités sur la géométrie.

Géométrie dans l'espace

Lorsqu'on ajoute une dimension à une surface, on obtient un volume. En connaissant certaines surfaces, on peut donc déduire certains volumes :

La surface d'un rectangle est le produit de sa largeur par sa longueur :

$$S = l \times L$$

Le volume d'un parallélépipède (pavé droit) est donc simplement le produit de cette surface par la hauteur h :

$$V = l \times L \times h$$

La surface d'un disque est le produit de π par son rayon au carré :

$$S = \pi r^2$$

Le volume d'un cylindre est simplement le produit de cette surface par la hauteur h :

$$V = \pi r^2 h$$

Si on se souvient de la surface d'un arc de disque :

$$S = \frac{\theta}{2} r^2$$

... on peut deviner le volume d'un coin :

$$V = \frac{\theta}{2} r^2 h$$

... à condition de se rappeler que l'angle ici est en radians, pas en degrés.

A partir de volumes, on peut déduire les volumes d'autres objets. Par exemple, le volume d'une pyramide dont la hauteur est égale à la moitié d'un des côtés de sa base. Si on dessine un cube, on voit qu'on peut le diviser en six parties donnant de telles pyramides. Le volume d'une pyramide est donc simplement :

$$V = \frac{c^3}{6}$$

Bien sûr, cette formule ne s'applique qu'à un cas particulier de pyramide. Il nous faudra des mathématiques un peu plus avancées pour aborder d'autres pyramides.

En conservant cette idée que, si une surface est le produit de deux dimensions, un volume est le produit de trois, et se souvenant qu'outre les coordonnées cartésiennes, il existe aussi des coordonnées cylindriques et des coordonnées sphériques, on devinera qu'il est possible de calculer le volume d'une sphère. Ce sera l'objet d'un chapitre plus tard, mais je laisserai ici, sans explication, la formule pour le volume d'une sphère :

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Bon.

Ce n'est pas grand-chose, les applications sont assez limitées.

Cela dit, on peut aussi calculer des volumes en étant un peu malin.

La décomposition consistait à diviser une forme complexe en formes simples. Est-ce qu'on pourrait faire ça avec un cône ?

Quand on y réfléchit, un cône est une succession de cylindres dont le rayon change à mesure qu'on évolue le long d'un axe.

Introduisons un peu de langage de l'analyse ici.

On appelle ΔV un petit morceau de volume

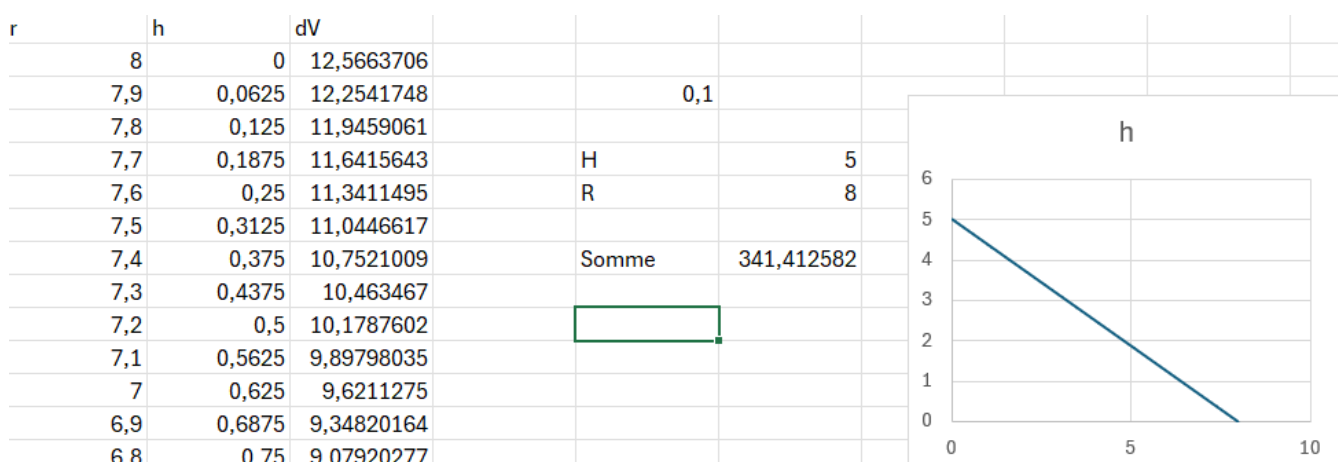
Pour un cône, le rayon varie en fonction de la hauteur, et inversement. Si on le regarde de côté, l'apothème du cône est une fonction affine de la forme :

$$h(r) = H - \frac{H}{R}r$$

Je sais que le volume d'un cylindre est la base multipliée par la hauteur. Le volume ΔV d'un petit cylindre qui constitue le cône est donc la base multipliée par une petite hauteur Δh . Et la base a un rayon qui varie, de R à 0.

Une fois que j'aurai calculé suffisamment de volumes, je n'aurai plus qu'à faire la somme pour trouver le volume d'un cône entier.

Et c'est ce que j'ai fait.



Dans la première colonne, j'ai écrit des valeurs pour r de sa valeur à la base à zéro ; dans la seconde, j'ai écrit la fonction pour la hauteur en fonction du rayon. Et dans la troisième colonne, j'ai calculé les petits dV .

$$\Delta V = \pi r^2 \Delta h$$

Δh étant la variation de h . La différence entre la valeur suivante et la valeur précédente.

J'ai calculé tout le long du rayon et fait la somme, et ça m'a donné un volume.

Bon, la vraie valeur donnée par la formule pour le volume d'un cône est autour de 335, mais c'est quand même assez proche.

Peut-être qu'en réduisant le pas, on trouverait quelque chose de plus proche de la réalité ?

Ce sera l'objet des intégrales dans l'espace.



Ah, ce cours est court. C'est que j'ai besoin de quelques outils pour commencer à dire des choses intéressantes sur les surfaces et les volumes. Ca va venir, ça va venir...

Matrices

On a vu que résoudre un système de deux équations est assez simple : résoudre la première équation pour une inconnue ; mettre l'expression ainsi obtenue dans la deuxième équation et résoudre pour la deuxième inconnue : mettre le résultat dans la première équation et résoudre pour la première inconnue.

Mais qu'en est-il de systèmes de trois, quatre... n inconnues ?

C'est là que les matrices, des objets mathématiques, deviennent *très* utiles. Plus encore : c'est là que la technologie – et notamment les feuilles de calculs – vient à notre aide.

Le principe d'une matrice pour résoudre un système d'équations repose sur une idée simple : chaque équation linéaire peut être représentée sous forme d'une ligne droite. Là où les droites intersectent est un point dont les coordonnées correspondent aux solutions du système d'équations. Elargissant cette idée aux espaces à n -dimensions, et vous avez un outil indispensable.

Composition d'une matrice

Une matrice M est une grille qui contient des valeurs. Cette grille contient des lignes et des colonnes, dont les coordonnées a_{ij} sont données en indice i et j . Par exemple, voici une matrice carrée de dimensions 3×3 (3 lignes par 3 colonnes) :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

On peut donc représenter des ensembles de nombres qui sont liés les uns aux autres par une certaine construction. Par exemple, on peut représenter un vecteur par une matrice :

$$\vec{v} = (x_v; y_v; z_v) = \begin{pmatrix} x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

Propriétés

On peut ajouter des matrices les unes aux autres comme on ajoute des vecteurs les uns aux autres : en prenant chaque dimension à part.

$$A = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$$

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x & a_y \pm b_y & a_z \pm b_z \end{pmatrix}$$

Il en découle une première règle : on ne peut ajouter des matrices les unes aux autres que si elles ont les mêmes dimensions.

Pour la multiplication, ça va être un peu plus compliqué.

Tout d'abord, on ne peut opérer de multiplication qu'entre des matrices dont l'une a autant de colonnes que l'autre a de lignes.

Par ailleurs, le produit entre deux matrices a autant de lignes que la première matrice a de lignes ; autant de colonnes que la première matrice a de colonnes.

Essayons de représenter cette dernière règle :

Si je multiplie une matrice 1×3 par une matrice 3×1 , j'obtiens une matrice 1×1 , c'est-à-dire un nombre.

$$A = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$$

$$A \times B = (a_x \quad a_y \quad a_z) \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Oh. C'était en fait la définition du produit scalaire entre deux vecteurs. Bon à savoir.

Si je multiplie une matrice 2×3 par une matrice 3×1 , j'obtiens une matrice 2×1 .

$$A = \begin{pmatrix} a_{1x} & a_{1y} & a_{1z} \\ a_{2x} & a_{2y} & a_{2z} \end{pmatrix}$$

$$B = (b_x \quad b_y \quad b_z)$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{1x} & a_{1y} & a_{1z} \\ a_{2x} & a_{2y} & a_{2z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1x}b_x + a_{1y}b_y + a_{1z}b_z \\ a_{2x}b_x + a_{2y}b_y + a_{2z}b_z \end{pmatrix}$$

Et si je multiplie une matrice 1×3 par une matrice 3×2 , j'obtiens une matrice 1×2 .

Et cætera.

Et quid du produit de deux matrices carrées de n dimensions ?

D'une part, suivant la règle définie avant, le produit d'une matrice $n \times n$ est une matrice $n \times n$. Une matrice de mêmes dimensions.

Ensuite, chaque terme de la matrice résultante est la somme des produits des termes de la ligne de la première matrice avec la colonne de la seconde.

Ce sera peut-être plus facile à comprendre avec l'écriture mathématique...

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} aj + bm + cp & ak + bn + cq & al + bo + cr \\ dj + em + fp & dk + en + fq & mc + nf + oi \\ gj + hm + ip & gk + hn + iq & gl + ho + ir \end{pmatrix}$$

Il y a une petite possibilité que j'ai fait une faute de frappe en tapant tout ça. L'apprentissage de cette procédure est en fait... très kinesthésique, dans le mouvement :

- on multiplie la première ligne de la première matrice par la première colonne de la seconde ; on fait la somme ; ça donne le terme a_{11} de la matrice résultante.
- on multiplie la première ligne de la première matrice par la seconde colonne de la seconde ; ça donne le terme a_{12} de la matrice résultante.
- on multiplie la première ligne de la première matrice par la troisième colonne de la seconde ; ça donne le terme a_{13} de la matrice résultante.
- on multiplie la deuxième ligne de la première matrice par la première colonne de la seconde ; ça donne le terme a_{21} de la matrice résultante.
- on multiplie la deuxième ligne de la première matrice par la deuxième colonne de la seconde ; ça donne le terme a_{22} de la matrice résultante.
- et ainsi-de suite jusqu'à la fin.

On l'aura deviné : la multiplication entre matrices n'est pas commutative.

$$A \times B \neq B \times A$$

On notera aussi que, sur une feuille de calculs, le produit de deux matrices est dans une simple fonction :

$$=PRODUITMAT(\text{matrice 1} ; \text{matrice 2})$$

Une feuille de calculs peut donc faire ce fastidieux calcul à notre place...

Une première application : réécrire un système d'équations sous forme de produit de deux matrices :

$$a_x x + a_y y + a_z z = A$$

$$b_x x + b_y y + b_z z = B$$

$$c_x x + c_y y + c_z z = C$$

Peut se réécrire :

$$\begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

Si vous avez besoin d'une preuve, faites le produit des deux matrices à gauche du signe égal : vous devriez retrouver les trois équations de départ dans une matrice 3×1 .



Excusez-moi d'arrêter ce cours ici, mais j'ai mal aux doigts. Pour l'instant, on sait faire des calculs de base avec les matrices. On va s'intéresser aux calculs avancés bientôt...

Déterminant d'une matrice

Le déterminant d'une matrice sert à...

Le déterminant d'une matrice prouve que...

Je ne sais pas.

Tout ce que je sais, c'est comment calculer le déterminant d'une matrice carrée. En utilisant la méthode des cofacteurs. Comme l'automobiliste lambda qui conduit sa voiture : je ne sais pas ni comment ni pourquoi ça marche, mais quand ça marche, ça roule.

Commençons par le déterminant d'une matrice 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Prenons le terme diagonalement opposé à a . C'est d . Ici, d est appelé le **mineur** de a . Donc, le terme diagonalement opposé à un terme de la matrice est le mineur de ce terme. On multiplie le premier terme par son mineur.

$$ad$$

Le premier terme est dans la case de la matrice aux coordonnées $(1; 1)$. Cela signifie que $i = 1$ et $j = 1$. Comme on doit multiplier ce qu'on vient de calculer par $(-1)^{i+j}$, et que $1 + 1 = 2$... on ne fait rien.

$$(-1)^{1+1}ad = ad$$

A propos, le mineur d'un terme multiplié par $(-1)^{i+j}$ où i et j sont les coordonnées du terme s'appelle le **cofacteur** du terme.

Passons au second terme : b .

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On multiplie ce terme par son mineur c . Le premier terme est dans la case de la matrice aux coordonnées $(1; 2)$. Cela signifie que $i = 1$ et $j = 2$. Comme on doit multiplier ce qu'on vient de calculer par $(-1)^{i+j}$, et que $1 + 2 = 3 \dots$ on multiplie par -1 .

$$(-1)^{1+2}bc = -bc$$

Et on fait la somme des deux cofacteurs.

$$\det(A) = ad - bc$$

Curieux, on essaye d'opérer la même procédure mais avec la deuxième ligne. Comme c est aux coordonnées $(2; 1)$ et d est aux coordonnées $(2; 2)$:

$$\det(A) = -bc + ad$$

Ce qui revient au même. Donc, voilà : le déterminant est ce nombre qu'on obtient après une opération relativement complexe entre une ligne d'une matrice et tous les autres termes, et qui est le même quelle que soit la ligne qu'on utilise. Voilà une réponse bien inutile à la question *c'est quoi, le déterminant d'une matrice...*

Prenons maintenant une matrice 3×3 .

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Cette fois, le mineur de a n'est pas un nombre mais une matrice 2×2 . Soit. Le premier terme de la somme que nous devons calculer est donc le produit de a avec le déterminant d'une matrice 2×2 . C'est bien, on a déjà vu comment calculer le déterminant d'une matrice 2×2 :

$$(-1)^{1+1}a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$$

Noter au passage qu'on note le déterminant d'une matrice comme une matrice entourée de deux barres verticales.

$$a(ei - fh)$$

Maintenant, la suite. La matrice mineure est séparée par les termes en dessous du terme, mais ça forme quand même une matrice 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Cette fois, le calcul à faire est :

$$(-1)^{1+1}b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$$

$$-b(di - fg)$$

Et enfin :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$(-1)^{1+3} c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$c(dh - eg)$$

Et on fait la somme :

$$a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

Résumons la procédure sous forme de procédure claire et de formule non moins claire :

- Pour chaque terme, identifier son mineur ; prendre le déterminant de ce mineur si nécessaire.
- Multiplier le déterminant par -1 à la puissance de la somme des coordonnées du terme. On obtient son cofacteur.
- Multiplier le cofacteur par le terme.
- Une fois avoir fait tous les termes de la ligne, faire la somme des produits des cofacteurs avec leur termes.

Traduit en formule :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Rappel : $\det(A_{ij})$ est le mineur de a_{ij} .

Si vous pensiez que cette procédure est complexe et arbitraire, vous n'êtes pas le seul. Mais elle se tient : on peut l'appliquer aux autres lignes de la matrice et toujours trouver le même déterminant. On peut même suivre une colonne à la place d'une ligne, et encore trouver la même valeur.

Maintenant, imaginez que l'on doive appliquer cette procédure à une matrice 4×4 . Le mineur de chaque terme serait une matrice 3×3 dont il faudrait calculer le déterminant. Ce serait pour le moins fastidieux...

Heureusement, les feuilles de calculs ont une fonction bien pratique pour calculer le déterminant d'une matrice, et ce quelle que soit sa taille et pourvu qu'elle soit carrée :

$$=\text{DETERMAT}(\text{matrice})$$

Voilà la deuxième fois que les feuilles de calculs vont faire les calculs pour nous...



Je me rends compte que j'ai complètement oublié de dire à quoi ça servait, le déterminant d'une matrice. Zut alors...

Matrice inverse

Rappelons-nous quel était notre objectif : résoudre une équation à n inconnues.

Déjà, nous avons vu que nous pouvons réécrire un système de trois équations sous forme de matrices :

$$a_x x + a_y y + a_z z = A$$

$$b_x x + b_y y + b_z z = B$$

$$c_x x + c_y y + c_z z = C$$

...devient :

$$\begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

Appelons la première matrice M , celle contenant les inconnues X , et celle contenant les constantes A . On obtient alors l'équation :

$$M \times X = A$$

Normalement, pour résoudre cette équation, on doit multiplier les deux côtés du signe égal par l'inverse de la matrice. On obtiendrait alors :

$$X = M^{-1} \times A$$

La question est donc : comment trouver M^{-1} ?

Si c'était une équation simple, on devrait trouver le nombre qui, multiplié par le nombre qu'on cherche à faire passer de l'autre côté du signe égal, donnerait 1.

Ici, on cherche la *matrice* qui, multipliée par M , donnerait la **matrice unitaire** (une matrice égale à 1).

$$\begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vous pouvez vous amuser à multiplier n'importe quelle matrice par la matrice unitaire, et vous verrez qu'en effet, elle est égale à 1 : le résultat serait la matrice que vous avez multipliée par la matrice unitaire.

Sans plus d'explications, passons à la procédure pour trouver M^{-1} . Et pour faciliter la lecture, prenons une matrice 2×2 .

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Tout d'abord, on doit trouver la **comatrice**. La comatrice d'une matrice M est une matrice qui contient les cofacteurs de la matrice M . On se souvient de comment trouver les cofacteurs :

$$(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

Donc, la comatrice de notre matrice est :

$$\text{com } M = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Maintenant, on prend la **transposée** de la comatrice. La transposée est simplement la matrice où les termes en haut à droite sont intervertis avec les termes en bas à gauche – les lignes sont maintenant des colonnes, les colonnes des lignes. Prenant un exemple avec une matrice 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$${}^t A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

Donc, prenons la transposée de notre comatrice :

$${}^t_{com} M = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Et enfin, on divise tout par le déterminant de la matrice.

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

J'ai promis plus tôt que le produit d'une matrice avec son inverse donne la matrice unitaire. On va essayer ça :

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{-b}{ad - bc} \\ \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ad - bc}{ad - bc} & \frac{bd - bd}{ad - bc} \\ \frac{-ac + ac}{ad - bc} & \frac{-bc + ad}{ad - bc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tout cela fait une procédure à étapes multiples pour trouver l'inverse d'une matrice.

Incidemment, pour trouver l'inverse d'une matrice avec une feuille de calculs, la fonction est :

$$= \text{INVERSEMAT}(\text{matrice})$$

Et voilà la troisième fois que la feuille de calculs fait tout le travail à notre place.



En voilà une autre procédure longue et alambiquée. Ce serait temps d'utiliser cet outil pour trouver quelque chose...

Trouver un polynôme de degré 2

Je pense l'avoir assez sous-entendu : personne n'effectue d'opérations avec des matrices sans utiliser une feuille de calculs. Personne que je connaisse, en tous cas. Personne de sain d'esprit.

Pour résoudre le problème suivant, nous allons donc utiliser une feuille de calculs pour effectuer les opérations.

Supposons qu'on cherche un polynôme de degré 2 :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Nous cherchons donc les coefficients a , b et c . Trois inconnues, cela veut dire que nous avons besoin de trois équations. Comme il s'agit d'une fonction, faisons en sorte que ces trois équations soient obtenues à partir de points.

Une supposition éclairée : les coordonnées dont nous avons besoin sont celles des racines et du vertex (l'extremum de la fonction). Il faudra se rappeler que la coordonnée horizontale du vertex est nécessairement pile au milieu d'un segment entre les deux racines.

Fort bien. Disons que les coordonnées des racines sont :

$$(3; 0) \text{ et } (11; 0)$$

Les coordonnées du vertex seront donc :

$$\left(3 + \frac{11 - 3}{2}; 10 \right) = (7; 10)$$

J'ai pris la deuxième coordonnée du vertex au hasard.

Avec ces coordonnées, je peux créer mes équations :

$$a(3)^2 + b(3) + c = 0$$

$$a(11)^2 + b(11) + c = 0$$

$$a(7)^2 + b(7) + c = 10$$

Je transforme ce système d'équations en équation de matrices :

$$\begin{pmatrix} 3^2 & 3 & 1 \\ 11^2 & 11 & 1 \\ 7^2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Plus simplement écrit :

$$M \times X = A$$

Maintenant, place à la procédure. Accrochez-vous.

- Dans une feuille de calculs, je trouve l'inverse M^{-1} de la première matrice (=INVERSEMAT (matrice)) .
- Je multiplie l'inverse de la première matrice par la dernière (=PRODUITMAT (matrice 1 ; matrice 2)).

$$X = M^{-1}A$$

	9	3	1			
M =	121	11	1			
	49	7	1			
	0,03125	0,03125	-0,0625	0	a	-0,625
M ⁻¹ =	-0,5625	-0,3125	0,875	0	b	8,75
	2,40625	0,65625	-2,0625	10	c	-20,625

- J'ai fini.

$$f(x) = -0.625x^2 + 8.75x - 20.625$$



On savait trouver des fonctions simples à partir des coordonnées de deux points. Maintenant, on peut trouver des polynômes – à condition de choisir ces points intelligemment.

Mais ce n'est pas fini... Vous vous rappelez des vecteurs ?

Produit vectoriel

Nous avons appris à calculer le déterminant, mais nous ne l'avons pas utilisé. Il faut dire que sa première utilisation réside dans l'assurance qu'il n'est pas égal à zéro. Si c'était le cas, il n'y aurait pas de solutions à notre système d'équations. Dit autrement, toutes les lignes représentant ces équations ne se croisent pas au même point.

C'est un peu limité, comme usage.

Heureusement, il y a une autre application du déterminant : le produit vectoriel.

Une application indirecte, toutefois. Rappelez-vous que le calcul du déterminant d'une matrice est un scalaire, alors que le produit vectoriel est le produit entre deux vecteurs qui donne un troisième vecteur. S'il

est faux de dire que le produit vectoriel est le déterminant d'une matrice, il faut reconnaître qu'il y a une grande similarité.

Laissez-moi décrire ma définition et expliquer ce que tout cela veut dire ensuite.

Tout d'abord, les vecteurs. Supposons deux vecteurs :

$$\vec{v} = (v_x; v_y; v_z)$$

$$\vec{u} = (u_x; u_y; u_z)$$

Le produit vectoriel est le déterminant d'une matrice contenant **les vecteurs unitaires** i, j et k , unitaires parce qu'ils ont tous une valeur numérique de 1 ; ils représentent chacun une des trois dimensions de l'espace. Les deuxième et troisième lignes sont les deux vecteurs dont on cherche le produit vectoriel :

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_x & v_y & v_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = (v_y u_z - v_z u_y)i - (v_x u_z - v_z u_x)j + (v_x u_y - v_y u_x)k$$

Notez que je privilégie la notation anglosaxonne $\times$ pour le produit vectoriel, par habitude autant que parce que je ne trouve pas le code en Latex pour la notation francophone.

Ah, si, j'ai trouvé : c'est `\wedge` : $\wedge$. Peu importe.

Maintenant, qu'est-ce que c'est, le produit vectoriel, et en quoi est-il différent du produit scalaire ?

Le **produit scalaire** est la multiplication de deux vecteurs entre eux ; ce produit donne un scalaire, un nombre tout seul qui n'est pas un vecteur. Nous nous contenterons pour le moment de deux dimensions.

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_x u_x + v_y u_y$$

Notez comme on utilise un point pour symboliser la multiplication sans qu'on la confonde avec un produit vectoriel.

On se rappelle comment calculer les coordonnées d'un vecteur à partir de sa norme et de l'angle qu'il fait avec l'horizontale :

$$\vec{v} = (|\vec{v}| \cos(\theta_v); |\vec{v}| \sin(\theta_v))$$

$$\vec{u} = (|\vec{u}| \cos(\theta_u); |\vec{u}| \sin(\theta_u))$$

On en déduit le produit scalaire :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cos(\theta_v) |\vec{u}| \cos(\theta_u) + |\vec{v}| \sin(\theta_v) |\vec{u}| \sin(\theta_u)$$

On peut factoriser :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| |\vec{u}| (\cos(\theta_v) \cos(\theta_u) + \sin(\theta_v) \sin(\theta_u))$$

Ici, il existe une identité remarquable qui va nous être très utile :

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

Je ne maîtrise pas vraiment la preuve de cette identité – je n'ai pas pris le temps de l'étudier – mais ça ne m'empêchera pas de l'utiliser ici. Si on admet que $\theta = \theta_v - \theta_u$, c'est-à-dire que θ est l'angle entre les deux vecteurs :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| |\vec{u}| \cos(\theta)$$

Ce petit truc devient très utile quand on cherche à calculer le travail d'une force à un certain angle. Mais on laissera ça à la physique.

Mais aussi :

$$\cos(\theta) = \frac{v_x u_x + v_y u_y}{|\vec{v}| |\vec{u}|}$$

Donc, on peut trouver l'angle entre n'importe quels vecteurs si on connaît leurs coordonnées.

On pourrait continuer à trouver des nouvelles propriétés qui pourraient aider certains problèmes en géométrie. On pourrait remplir des pages. Mais passons au produit vectoriel.

Le produit vectoriel aussi aide beaucoup en géométrie (et en mécanique, surtout).

Le **produit vectoriel** est le produit de deux vecteurs entre eux. Le résultat est un troisième vecteur, et c'est là la différence avec le produit scalaire.

Prenons deux vecteurs : un qui va dans le sens de i (x), un autre qui va dans le sens de j (y).

$$\vec{v} = (1; 0; 0)$$

$$\vec{u} = (0; 1; 0)$$

Le produit vectoriel entre deux vecteurs est le déterminant de la matrice contenant les vecteurs unitaires et les deux vecteurs. Je l'ai déjà dit.

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 \times 0 - 0 \times 1)i - (1 \times 0 - 0 \times 0)j + (1 \times 1 - 0 \times 0)k$$

Ce qui nous donne le vecteur :

$$\vec{v} \times \vec{u} = (0; 0; 1)$$

Intéressant : ce vecteur va dans le sens de k (z). Le produit vectoriel entre deux vecteurs donne donc un troisième vecteur qui est perpendiculaire aux deux autres.

Changeons la taille de ces vecteurs :

$$\vec{v} = (2; 0; 0)$$

$$\vec{u} = (0; 2; 0)$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0 \times 0 - 0 \times 2)i - (2 \times 0 - 0 \times 0)j + (2 \times 2 - 0 \times 0)k = (0; 0; 4)$$

Intéressant encore : le produit vectoriel entre deux vecteurs semble donner la surface entre les deux vecteurs.

Ce serait certainement quelque chose à tester avec d'autres vecteurs et à représenter graphiquement, mais pour l'instant, répétons les deux propriétés du produit vectoriel :

- le vecteur obtenu est perpendiculaire aux deux autres
- sa norme est égale à la surface entre les deux vecteurs

Tout cela sera très utile lorsque nous parlerons de moment d'une force, de charges électriques mouvant dans un champ électrique... et de concepts physiques plus complexes que ça.

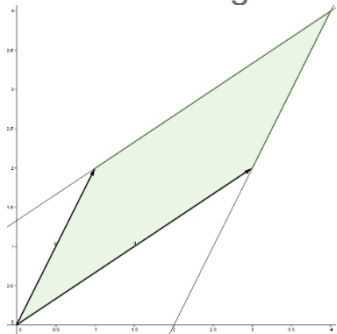
Incidentement, les mauvaises langues pourraient dire que j'ai passé trop de temps à expliquer comment calculer le déterminant alors que les feuilles de calculs le font pour nous. Eh bien, mauvaise nouvelle pour les mauvaises langues : il faut savoir calculer le déterminant manuellement pour pouvoir opérer le produit vectoriel. Ce n'est pas si compliqué, puisqu'il n'y a que trois dimensions de l'espace, et donc que le seul déterminant qu'on doit calculer est celui d'une matrice 3×3 .



On commence à rentrer dans le vif des calculs, où taper quelques nombres dans une calculatrice ne suffit plus et où il faut s'organiser.

Je le dis souvent : commencer à travailler avec des feuilles de calculs aide beaucoup. Sauve, même.

Surface et angle entre deux vecteurs



Allez, prenons un exemple : calculons la surface et l'angle entre deux vecteurs.

On a deux vecteurs dans un espace en trois dimensions :

$$\vec{v} = (1; 2; 0)$$

$$\vec{u} = (3; 2; 0)$$

Le produit vectoriel entre ces deux vecteurs est donné par le déterminant de la matrice :

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (2 \times 0 - 0 \times 2)i - (1 \times 0 - 0 \times 3)j + (1 \times 2 - 2 \times 3)k$$

Tout cela se simplifie gentiment :

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (2 - 6)k = -4k$$

Le vecteur w résultant de ce produit vectoriel a donc les coordonnées :

$$w = (0; 0; -4)$$

Et la norme de ce vecteur est :

$$\sqrt{0^2 + 0^2 + (-4)^2} = 4$$

La surface du parallélépipède crée par ces deux vecteurs est donc égale à 4.

Pour l'angle, on a trouvé que :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}|\cos(\theta)$$

On applique donc :

$$(1; 2; 0) \cdot (3; 2; 0) = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}\sqrt{3^2 + 2^2 + 0^2}\cos(\theta)$$

$$3 + 4 = \sqrt{5}\sqrt{13}\cos(\theta)$$

Et il ne reste plus qu'à résoudre pour θ :

$$\frac{7}{8} = \cos(\theta)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{7}{8}\right) = 0.52 \text{ ou } 30^\circ$$

Et si on changeait l'ordre de multiplication des vecteurs ? En clair : et si on multipliait $\vec{u}$ par $\vec{v}$?

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (3 \times 0 - 0 \times 1)i - (3 \times 0 - 0 \times 1)j + (3 \times 2 - 2 \times 1)k = 4k$$

On trouve le même vecteur, de même norme – et donc de même surface – mais il va dans la direction inverse.

Et l'angle ?

$$(3; 2; 0) \cdot (1; 2; 0) = \sqrt{3^2 + 2^2 + 0^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} \cos(\theta)$$

$$3 + 4 = \sqrt{5} \sqrt{13} \cos(\theta)$$

$$\frac{7}{8} = \cos(\theta)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{7}{8}\right) = 0.52 \text{ ou } 30^\circ$$

L'angle, lui, n'a pas changé. On a eu chaud, parce que j'aurai eu du mal à expliquer pourquoi il serait différent selon qu'on le mesure dans un sens ou dans l'autre...

Le produit vectoriel n'est donc pas commutatif. La bonne nouvelle, c'est que si on change l'ordre du produit, le vecteur obtenu est le même mais dans l'autre direction :

$$\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}$$



Donc, le déterminant d'une matrice sert à quelque chose. Et aussi le produit scalaire. Qui l'eut cru ?

J'ai une dernière chose à dire sur les vecteurs et les matrices. Mais ça va faire mal. Aux yeux.

Matrice Jacobienne

On arrive très vite aux limites de ma compréhension de toutes choses mathématiques, mais persévérons un peu. De plus, ce qui suit est une opportunité d'utiliser ce fameux calcul de déterminant.

Notre objectif est d'exprimer un volume en coordonnées sphériques. Pour rappel, un volume élémentaire est donné par :

$$dV = dx \, dy \, dz$$

Ça semble simple : on exprime x en fonction des coordonnées ρ , θ et φ , on prend la dérivée et on multiplie... non ?

Non.

Tout simplement parce que, en exprimant x en coordonnées sphériques, on a une fonction avec 3 variables.

Je n'ai pas beaucoup d'explications pour ce qui va suivre – je sais comment ça marche, mais pas vraiment pourquoi – mais procédons :

On appelle matrice Jacobienne une matrice des dérivées partielles de fonctions vectorielles.

Houlà. Y a des choses à déballer, là...

Une fonction vectorielle, c'est un vecteur où chaque dimension est une fonction. Par exemple, nous avons exprimé ce que vaut x en coordonnées sphériques :

$$x = \rho \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

On ne dirait pas comme ça, mais ça représente trois fonctions :

$$x(\rho) = \rho \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

$$x(\theta) = \rho \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

$$x(\varphi) = \rho \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

Une dérivée partielle, c'est la dérivée par rapport à chacune des variables. Donc, les dérivées partielles de x sont :

$$\frac{dx}{d\rho} = \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \rho \cos(\theta) \cos(\varphi)$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

Et c'est quoi, $dV = dx dy dz$ en coordonnées sphériques ?

Chaque dimension contient trois dérivées partielles. Ça fait un total de neuf dérivées à trouver pour construire une matrice Jacobienne.

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{d\rho} & \frac{dx}{d\theta} & \frac{dx}{d\varphi} \\ \frac{dy}{d\rho} & \frac{dy}{d\theta} & \frac{dy}{d\varphi} \\ \frac{dz}{d\rho} & \frac{dz}{d\theta} & \frac{dz}{d\varphi} \end{pmatrix}$$

Hé bien autant s'y attaquer maintenant : chaque ligne de la matrice Jacobienne contient les dérivées partielles de chaque dimension.

$$\begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) d\rho & \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) d\theta & -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) d\varphi \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) d\rho & \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) d\theta & \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) d\varphi \\ \cos(\theta) d\rho & -\rho \sin(\theta) d\theta & 0 d\varphi \end{pmatrix}$$

Ça m'a pris un moment, mais c'est fait. Place à la procédure :

On calcule le déterminant de cette matrice :

$$\begin{vmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) d\rho & \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) d\theta & -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) d\varphi \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) d\rho & \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) d\theta & \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) d\varphi \\ \cos(\theta) d\rho & -\rho \sin(\theta) d\theta & 0 d\varphi \end{vmatrix}$$

$$= [\sin(\theta) \cos(\varphi) (\rho^2 \sin^2(\theta) \cos(\varphi)) + \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) (\rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \cos(\theta)) - \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) (-\rho \sin^2(\theta) \sin(\varphi) - \rho \cos^2(\theta) \sin(\varphi))] d\rho d\theta d\varphi$$

Pour la suite, je vais ne pas écrire $d\rho d\varphi d\theta$, c'est bien assez compliqué comme ça...

$$= \rho^2 \sin^3(\theta) \cos^2(\varphi) + \rho^2 \cos^2(\theta) \cos^2(\varphi) \sin(\theta) + \rho^2 \sin^3(\theta) \sin^2(\varphi) + \rho^2 \cos^2(\theta) \sin^2(\varphi) \sin(\theta)$$

On peut factoriser $\sin(\theta)$:

$$= \rho^2 \sin(\theta) (\sin^2(\theta) \cos^2(\varphi) + \cos^2(\theta) \cos^2(\varphi) + \sin^2(\theta) \sin^2(\varphi) + \cos^2(\theta) \sin^2(\varphi))$$

Et factoriser $\sin^2(\theta)$ et $\cos^2(\theta)$ à l'intérieur des parenthèses :

$$= \rho^2 \sin(\theta) (\sin^2(\theta) (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) + \cos^2(\theta) (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)))$$

Comme $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, pas mal de choses s'annulent...

$$= \rho^2 \sin(\theta) (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta))$$

... et s'annulent encore.

$$= \rho^2 \sin(\theta)$$

Je réintègre $d\rho d\varphi d\theta$ et j'obtiens ce que je cherchais :

$$dV = \rho^2 \sin(\theta) d\rho d\varphi d\theta$$

Intéressant. Il semble vraiment que le déterminant d'une matrice est lié à la surface ou au volume d'un objet décrit par cette matrice. On trouvera ça par des moyens détournés (regarder le dessin d'une sphère avec attention), mais c'est toujours intéressant de savoir qu'on peut trouver la même chose avec deux approches apparemment différentes.

Dans tous les cas, on a découvert une propriété : le déterminant d'une matrice Jacobienne est égal au volume. Je crois.

Essayons le même raisonnement avec les coordonnées cylindriques :

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$z = z$$

Je construis la matrice Jacobienne (trois dérivées pour chaque dimension) et j'en trouve le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta)dr & -r\sin(\theta)d\theta & 0dz \\ \sin(\theta)dr & r\cos(\theta)d\theta & 0dz \\ 0dr & 0d\theta & 1dz \end{vmatrix}$$

$$= [r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta)]drd\theta dz$$

$$= r dr d\theta dz$$

Ah c'était plus simple. On aurait dû commencer par là...

On a donc la définition d'un volume en coordonnées cylindriques :

$$dV = r dr d\theta dz$$



Très bien. Maintenant qu'on a un outil pour calculer des surfaces et des volumes en coordonnées sphériques...

J'ai complètement oublié de parler des intégrales.

Bon. Voilà une opportunité pour revenir sur des points importants de l'analyse.

Analyse

Le calcul infinitésimal est un champ des mathématiques dont la fondation est attribuée à Leibniz et Newton. C'est important, parce que Newton est aussi considéré comme le père fondateur de la physique. C'est donc le type de mathématiques que les physiciens et les ingénieurs utilisent quotidiennement. Et c'est un champ des mathématiques basé sur deux idées simples : les choses changent, et les choses sont composées de petites choses.

Dérivées et leur approximation

On a vu que les fonctions évoluent le long de l'axe des abscisses : elles croissent (montent), décroissent (descendent) et passent par des extrema (minimum ou maximum).

Si on prend deux points sur une courbe, près l'un de l'autre, et qu'on tire une ligne droite, on obtient l'hypoténuse d'un triangle qui épouse la courbe – c'est une approximation. La base de ce triangle est la variation Δx entre les deux points. Sa hauteur est la variation Δy entre les deux points. On peut calculer la tangente – la pente de la courbe :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

En faisant quelques tests, on note quelque chose : si la pente est ascendante (elle monte), la tangente est une valeur positive. Si la pente est descendante, la tangente est négative. Et s'il n'y a pas de pente, la tangente est égale à zéro.

En faisant en sorte que le Δ soit très petit, et en répétant le calcul pour un grand nombre de paires de points, on obtient un tableau de valeurs. En en faisant une représentation graphique, on obtient une deuxième courbe. Appelons la première courbe $f(x)$ et la deuxième courbe $f'(x)$ (l'apostrophe se dit *prime*).

Testons une fonction linéaire de type $f(x) = ax$, et trouvons la fonction f' . On note que cette dernière est une fonction constante, qui ne change pas avec x . Plus encore : cette valeur de y qui ne change pas est presque égale au coefficient directeur a de la fonction affine. En changeant le pas pour une valeur plus petite, elle en devient encore plus proche.

De cette expérience, on déduit une chose et on prend une décision :

- si le pas était infiniment petit, la valeur constante représentée par f' serait exactement égale à la pente de la fonction affine.
- avant de faire d'autres expériences, on doit imaginer une variation Δ infiniment petite. La première lettre de Delta est un d majuscule : prenons un d minuscule.

$$\frac{dy}{dx}$$

- et puis, tant qu'on y est, appelons f' la dérivée de f .

A ce stade, nous pouvons écrire :

Pour $f(x) = ax$, $f'(x) = a$

Répétons ce test pour une fonction carrée de la forme $f(x) = ax^2$. Avec un pas petit, et en variant la valeur de a , on constate que la fonction dérivée $f'(x)$ est une fonction affine dont le coefficient directeur est égal au double de celui de la fonction carrée.

On peut donc écrire :

Pour $f(x) = ax^2$, $f'(x) = 2ax$

Répétons une dernière fois ce test avant de faire une hypothèse : avec une fonction cube, de la forme $f(x) = ax^3$. En effectuant le même test, on constate que $f'(x)$ est une fonction carrée dont le coefficient directeur est égal au triple de celui de la fonction cube.

On peut donc écrire :

Pour $f(x) = ax^3$, $f'(x) = 3ax^2$

On peut enfin énoncer notre hypothèse :

$$\text{Pour } f(x) = ax^n, f'(x) = nax^{n-1}$$

Et que fait-on, avec les hypothèses ? On les teste.

Par exemple, et si la fonction est $f(x) = c$, où c est une constante ? Graphiquement, la fonction n'a pas de pente : c'est une ligne horizontale. Si on se rappelle que $x^0 = 1$, on peut réécrire la fonction :

$$f(x) = cx^0$$

En appliquant notre hypothèse, on voit que la dérivée – la pente – est en effet égale à zéro. Notre hypothèse est confirmée.

Il faudra juste penser à faire plus que quatre tests pour la confirmer définitivement...



Voilà pour les dérivées. Juste de polynômes, pour le moment. Maintenant, attaquons-nous aux primitives.

Primitives

La primitive est *presque* la réciproque de la dérivée.

Pour rappel, la réciproque d'une opération est l'opération qui annulerait son effet. Par exemple, la réciproque de l'opération *ajouter 3* est *retirer 3*.

Prenons l'hypothèse qu'on a décrit tout à l'heure.

$$\text{Pour } f(x) = ax^n, f'(x) = nax^{n-1}$$

La réciproque de la dérivée, qu'on appelle primitive et qu'on note $F(x)$, est l'opération inverse. Il n'y a qu'à inverser :

$$\text{Pour } f(x) = nax^{n-1}, F(x) = ax^n$$

Ça ne va pas beaucoup nous aider.

D'abord, occupons-nous de l'exposant. Pour trouver la dérivée, il fallait retirer 1. Pour faire l'inverse, on supposera qu'il faut ajouter 1.

Ensuite, on multipliait a par l'exposant. Pour faire l'inverse, on supposera qu'il faut diviser par l'exposant mais attention : l'exposant *plus 1*.

$$\text{Pour } f(x) = nax^n, F(x) = \frac{a}{n+1} ax^{n+1}$$

Pourquoi ? Parce que comme ça, ça marche.

La preuve :

La dérivée de $f(x) = 3x^3$ est $f'(x) = 9x^2$. Pour retrouver la fonction $f(x)$, je n'ai qu'à prendre la primitive de $f'(x)$.

$$F(x) = \frac{9}{2+1} x^{2+1} = 3x^3$$

Apparemment, ça marche. Mais attention, c'est incomplet.

Au début, j'ai dit que la primitive était *presque* la réciproque de la dérivée. C'est parce que la dérivée d'une constante est égale à zéro.

Imaginons qu'on ait une fonction affine :

$$f(x) = 3x^2 + 8$$

La dérivée du premier terme est, suivant notre hypothèse, $6x$. La dérivée de la constante, comme on l'a vu, est zéro. Donc :

$$f'(x) = 6x$$

Essayons maintenant de retrouver la fonction de départ en prenant la primitive de cette dérivée :

$$F(x) = \frac{6}{1+1} x^{1+1} = 3x^2$$

Mais c'est faux ! La fonction originale contenait un terme constant, et il a disparu.

Lors du processus, la constante a disparu, et il est impossible de la retrouver. On doit donc présumer, lorsqu'on prend la primitive d'une fonction, qu'elle inclut une constante dont nous ne connaissons pas la valeur. Appelons-là c .

$$\text{Pour } f(x) = nax^n, F(x) = \frac{a}{n+1} ax^{n+1} + c$$



Et voilà pour les primitives. Juste de polynômes, pour le moment. On peut maintenant s'attaquer aux intégrales.

Intégrales et théorème fondamental de l'analyse

Pour bien comprendre ce qui va suivre, je vais devoir prendre un exemple et essayer d'en tirer des généralités.

Prenons une fonction linéaire, passant par l'origine : $f(x) = 4x$

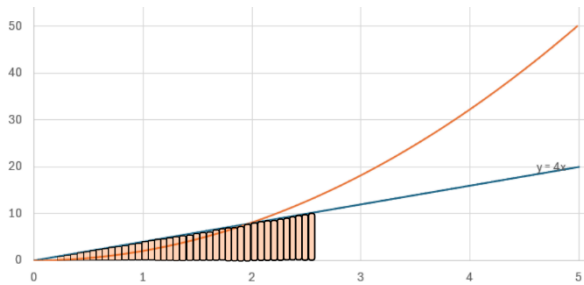
Supposons que je m'intéresse à la surface sous cette fonction. Je peux calculer la surface pour chaque élément dx : c'est simplement le produit de dx avec l'image de la fonction à cet endroit.

Je peux ensuite faire la somme de toutes ces surfaces...

$$S = \sum f(x)dx$$

... et créer une fonction avec ça. Ainsi, j'aurai une fonction pour la surface en fonction de x .

Voilà qui est intéressant : la courbe obtenue est une fonction carrée qui passe par l'origine.



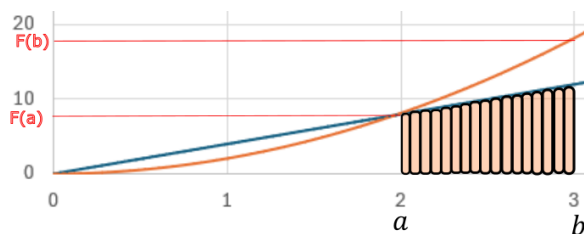
En utilisant les coordonnées de deux points par laquelle cette courbe passe, je peux calculer son coefficient directeur (voir le chapitre sur les fonctions simples) :

$$\text{Pour } (0; 0) \text{ et } (5; 50), a = \frac{50-0}{5^2-0^2} = 2.$$

La fonction représentant la surface est égale à $2x^2$.

Je dis ça, je dis rien, mais la primitive de $f(x) = 4x$, c'est justement $F(x) = \frac{4}{1+1}x^{1+1} = 2x^2$. On dirait bien que la surface en dessous d'une courbe est liée aux primitives...

Une autre hypothèse, donc : la surface en dessous de la courbe est égale à la primitive évaluée entre deux limites (un intervalle entre deux valeurs pour x).



Dis autrement : la surface sous la courbe entre deux points a et b est égale à la différence entre la primitive évaluée à b et la primitive évaluée à a .

$$S = F(b) - F(a)$$

Maintenant, comment avons-nous trouvé que c'était la surface ? On a simplement fait une somme de produits de $f(x)$ avec dx . Si on allonge un peu la lettre S , on obtient **l'intégrale**, c'est-à-dire la somme de portions infiniment petites.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

C'est le théorème fondamental de l'analyse et, dans un premier temps et comme on l'a vu, il permet de calculer la surface sous une courbe. Plus généralement, il permet de calculer n'importe quoi tant qu'on peut l'exprimer sous forme de fonction et le découper en petites parties – des distances, des surfaces, des volumes...

Comme pour les dérivées, on fait l'hypothèse que l'approximation nous permet de trouver la primitive de n'importe quelle fonction. Théoriquement.

Testons un peu cette hypothèse. Supposons une forme composée d'un triangle rectangle qui surmonte un rectangle. La largeur du rectangle est b , et sa hauteur h_1 . La base du triangle est elle aussi b et celle du triangle h_2 .

Avec un peu de géométrie, on trouve que la surface de cette forme est simplement :

$$S = bh_1 + \frac{b(h_2 - h_1)}{2}$$

Pour comparer, trouvons la fonction linéaire qui décrit l'hypoténuse du triangle. On connaît les coordonnées de deux points : $(0; h_1)$ et $(b; h_2)$. On en déduit :

$$f(x) = \frac{h_2 - h_1}{b}x + h_1$$

Sachant que l'intégrale entre deux points est la surface, on écrit :

$$S = \int_0^b f(x)dx$$

On trouve la primitive de la fonction :

$$F(x) = \frac{h_2 - h_1}{2b}x^2 + h_1x + c$$

Appliquons le théorème fondamental de l'analyse :

$$S = \frac{h_2 - h_1}{2b}b^2 + h_1b + c - \left(\frac{h_2 - h_1}{2b}0^2 + h_10 + c \right)$$

$$S = \frac{h_2 - h_1}{2b}b^2 + h_1b$$

On simplifie et on réorganise :

$$S = bh_1 + \frac{b(h_2 - h_1)}{2}$$

Ce qui est la même chose qu'on avait trouvé par géométrie.

Evidemment, utiliser une intégrale pour cet exemple est inutile – il est bien plus simple d'utiliser les formes géométriques de base. Mais pour d'autres cas, ce sera en fait bien utile.



Cela constituera une introduction aux intervalles sous les courbes. Nous verrons bientôt que cela va bien plus loin mais pour le moment, revenons à l'application des dérivées.

Application des dérivées

Nous avons donc vu qu'une dérivée est une fonction f' qui décrit l'évolution d'une fonction f . Si la fonction croît, sa dérivée est positive ; si elle décroît, elle est négative. Et si elle est égale à zéro, la fonction passe par un extremum à ce point.

Concentrons-nous sur ce dernier point : nous avons entre nos mains un outil qui permet de trouver les coordonnées d'un maximum ou d'un minimum dans une fonction. En effet : si on prend la dérivée et qu'on l'égalise à zéro, on pourrait trouver la coordonnée horizontale de l'extremum. Et pour trouver sa coordonnée verticale, juste remplacer x dans la fonction originale et calculer l'image.

Prenons un exemple : un polynôme du second degré. La courbe d'un polynôme est toujours une parabole, donc n'importe lequel devrait avoir un maximum (ouvert vers le bas) ou un minimum (ouvert vers le haut).

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 54$$

On trouve rapidement la dérivée :

$$f'(x) = 6x - 12$$

On l'égalise à zéro :

$$0 = 6x - 12$$

Et on résout pour x :

$$x = \frac{12}{6} = 2$$

On trouve maintenant $f(2)$:

$$f(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 54$$

$$f(2) = 42$$

Les coordonnées de l'extremum sont donc :

$$(2; 42)$$

Pratique. Pas besoin de faire un graphique pour trouver l'extremum d'une fonction. Maintenant, ce serait bien de savoir si cet extremum est un maximum ou un minimum...

Mais on l'a, la solution : si la dérivée est négative, la fonction est décroissante, si elle est positive...

Il suffit d'évaluer la dérivée à une valeur inférieure à 2, la coordonnée horizontale de l'extremum : si elle est négative, ça veut dire qu'avant d'atteindre l'extremum la fonction était décroissante, et donc cet extremum est un minimum. Si elle est positive, la fonction est croissante, et c'est un maximum.

Prenons 1, puisque c'est inférieur à 2 et facile à calculer :

$$f'(1) = 6(1) - 12 = -6$$

La dérivée est négative, la pente est donc décroissante, et notre extremum est un minimum.

Mais on peut faire encore plus : trouver les racines d'un polynôme de degré 2.

Les racines, ce sont les points sur l'axe des abscisses par lesquels la courbe du polynôme passe. Les seules choses qu'on connaît d'eux, c'est que leurs coordonnées verticales sont égales à zéro, et qu'elles sont à une distance égale de l'extremum.

Mmh. Et on vient juste de trouver les coordonnées de l'extremum...

Prenons le modèle d'un polynôme de second degré :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Et prenons sa dérivée :

$$f'(x) = 2ax + b$$

Appelons la coordonnée horizontale de l'extremum h , égalisons la dérivée à zéro, et résolvons :

$$0 = 2ah + b$$

$$h = \frac{-b}{2a}$$

Appelons la coordonnée verticale k , et nous obtenons une jolie petite formule pour calculer les coordonnées de l'extremum :

$$\left(\frac{-b}{2a}; f(k) \right)$$

Mais ce n'est pas cela qui nous intéresse : appelons la distance entre la coordonnée horizontale de l'extremum et la racine β . Comme on sait que la coordonnée verticale de la racine est zéro, on peut utiliser la fonction pour écrire :

$$0 = a \left(\frac{-b}{2a} + \beta \right)^2 + b \left(\frac{-b}{2a} + \beta \right) + c$$

On souhaite trouver ce β . Comme on connaît déjà les coordonnées de l'extremum, il nous suffirait de l'ajouter pour trouver celles d'une des racines.

D'abord, développons :

$$0 = a \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b\beta}{a} + \beta^2 \right) - \frac{b^2}{2a} + b\beta + c$$

$$0 = \frac{b^2}{4a} - b\beta + a\beta^2 - \frac{b^2}{2a} + b\beta + c$$

Certains termes s'annulent, d'autres se combinent, ça fait toujours plaisir à voir :

$$0 = \frac{b^2}{4a} + a\beta^2 - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$0 = a\beta^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Ne reste plus qu'à résoudre pour β :

$$\beta = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

Réorganisons tout ça pour faire plus joli :

$$\beta = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nous avons trouvé une expression pour β . Et on sait qu'en l'ajoutant à la coordonnée horizontale de l'extremum, on trouvera celle d'une des racines. Et l'autre ? Il suffira de l'enlever.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Est-ce que j'ai déjà écrit cette preuve dans le premier cours sur les dérivées ? Oui. Mais je suis tellement content de l'avoir trouvée tout seul comme une grande personne la première fois que je me suis posé la question que je la répète ici.



Bien sûr, il y a d'autres applications des dérivées (j'en ai une sur les boîtes de conserve, si ça vous intéresse). Mais puisque nous avons commencé à utiliser l'analyse pour parler de géométrie : continuons sur ce chemin.

Calculs de volumes cylindriques

On l'a vu, le volume d'un cylindre est simplement la surface de sa base multipliée par sa hauteur.

$$V = \pi r^2 h$$

Et si cette hauteur était une fonction de r ? Pour un cylindre normal, cette fonction est une constante, mais si c'était une fonction linéaire, ou carré, ou n'importe quelle fonction.

Ici, nous allons utiliser notre capacité à décrire une courbe avec une fonction, puis l'appliquer au concept d'intégrale – l'addition de petits morceaux, le théorème fondamental de l'analyse.

Prenons un cône. Sa base est πr^2 .

Un cône peut être divisé en petits cylindres de hauteur dh . On en déduit la formule pour un petit volume dV :

$$dV = \pi r^2 dh$$

Rappel : dV se dit *dérivée de V* et dh se dit *dérivée de h*. V et h sont des fonctions.

Maintenant, prenons l'apothème d'un cône. C'est une fonction linéaire qui va des coordonnées $(0; H)$ aux coordonnées $(R; 0)$. On en déduit la fonction $h(r)$:

$$h(r) = \frac{0 - H}{R - 0} r + H$$

$$h(r) = H - \frac{H}{R} r$$

Pour calculer un élément de volume dV , nous avons besoin de la dérivée de h . Trouvons là :

$$dh = -\frac{H}{R} dr$$

On intègre ce résultat à l'expression du volume dV :

$$dV = -\pi r^2 \frac{H}{R} dr$$

Maintenant, nous pouvons prendre l'intégrale aux deux côtés de l'équation. A gauche, la variable d'intégration est le volume, donc on intègre de 0 à V ; à droite, la variable d'intégration est dr , donc on intègre de 0 à R .

$$\int_0^V dV = -\pi \frac{H}{R} \int_0^R r^2 dr$$

Notez comme j'ai sorti les constantes qui multipliaient la variable d'intégration. La primitive en sera plus évidente.

$$[V]_0^V = -\pi \frac{H}{R} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R$$

Appliquons les limites d'intégration :

$$V - 0 = -\pi \frac{H}{R} \left(\frac{R^3}{3} - 0 \right)$$

Tout cela se simplifie :

$$V = -\frac{1}{3}\pi HR^2$$

Ça ressemble en effet à la formule qu'une rapide recherche sur internet donne, mais pourquoi le signe négatif ?

C'est parce qu'on a commis une petite erreur sans grande importance : on a mal défini nos variables d'intégration du rayon. Et quand je dis *sans grande importance*, je mens.

Je disais qu'on additionnait des petits cylindres de hauteur dh . Mais au début, le cylindre a un rayon égal à R . A la fin, il a un rayon de 0. Il faut donc d'inverser les variables d'intégration pour le rayon :

$$\int_0^V dV = -\pi \frac{H}{R} \int_R^0 r^2 dr$$

$$[V]_0^V = -\pi \frac{H}{R} \left[\frac{r^3}{3} \right]_R^0$$

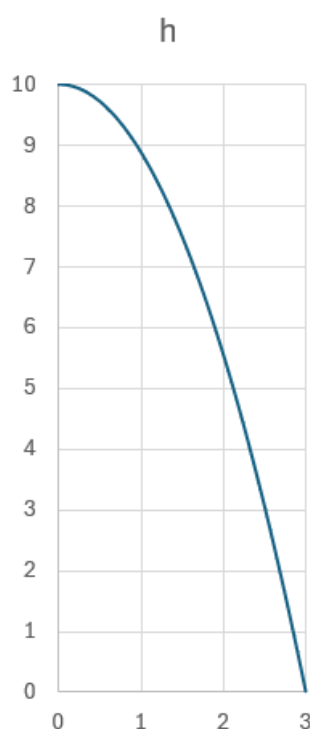
$$V - 0 = -\pi \frac{H}{R} \left(0 - \frac{R^3}{3} \right)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi HR^2$$

Lors de l'écriture de ce cours, j'ai *presque* volontairement commis cette erreur pour insister sur un point : il faut bien réfléchir avant de décider des variables d'intégration : où commence-t-on, où fini-t-on. Sinon, on se retrouve avec des résultats insensés qui prennent environ dix minutes à corriger alors qu'on doit préparer son prochain cours au lieu d'écrire des trucs que personne ne lit...

Le cours a été annulé, amusons-nous un peu : et si la fonction était une fonction carrée ?

Imaginons donc un cône dont l'apothème est défini par une fonction carrée. La hauteur de cette forme (le vertex) est H , et le rayon de la base est R .



On définit la fonction :

$$h(r) = \frac{0 - H}{R^2 - 0} r^2 + H$$

$$h(r) = H - \frac{H}{R^2} r^2$$

On trouve la dérivée et on l'intègre à la formule pour le volume d'un cylindre d'épaisseur dh :

$$dh = -2 \frac{H}{R^2} r dr$$

$$dV = -2\pi \frac{H}{R^2} r^3 dr$$

Plus qu'à prendre l'intégrale (Je ne commets pas la même erreur que tout à l'heure) :

$$V = -2\pi \frac{H}{R^2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_R^0$$

Et on simplifie.

$$V = \frac{\pi}{2}HR^2$$

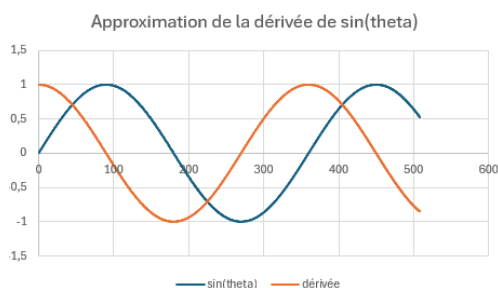
On peut calculer manuellement (avec une feuille de calculs) la somme des volumes de petits cylindres de hauteur Δh et comparer : ça marche.



J'espère que vous avez compris à ce point que les intégrales sont des outils puissants pour calculer des surfaces ou des volumes – à condition de définir les formes avec des fonctions. Mais maintenant, il va falloir parler de dérivées et d'intégrales d'autre chose que des polynômes.

Stratégies de dérivation

On a développé tout ce qu'on sait des dérivées à partir d'une hypothèse : si je calcule la tangente entre deux points séparés par une distance Δx , et que je fais en sorte que cet écart soit le plus petit possible (dx), puis que je fais de toutes ces valeurs une fonction, cette fonction est la dérivée.



En observant la dérivée que j'obtiens, j'en déduis pour les polynômes que :

$$\text{Pour } f(x) = ax^n, f'(x) = nax^{n-1}$$

Je peux appliquer la même procédure à n'importe quelle autre fonction.

Par exemple, la fonction $\sin(\theta)$. Si je calcule la dérivée (la tangente entre deux points) tout le long de la fonction, je trouve une autre fonction qui ressemble beaucoup à une fonction $\cos(\theta)$.

J'en conclus :

$$\text{Pour } f(x) = \sin(x), f'(x) = \cos(x)$$

Je fais le test avec $\cos(\theta)$, et j'obtiens quelque chose qui ressemble beaucoup à $-\sin(\theta)$.

J'en conclus :

$$\text{Pour } f(x) = \cos(x), f'(x) = -\sin(x)$$

On peut deviner (et on pourra vérifier par soi-même) que la dérivée de $-\sin(x)$ est $-\cos(x)$, et celle de $-\cos(x)$ est $\sin(x)$.

J'en profite pour noter que si la dérivée de $\sin(x)$, c'est $\cos(x)$, alors la primitive de $\cos(x)$, c'est $\sin(x)$.

Pour la fonction $\tan(x)$, je rencontre des difficultés : non seulement je n'arrive pas à obtenir un graphique lisible sur une large gamme de valeurs, mais quand je zoome assez fort sur le graphique, je n'ai aucune idée de ce que je regarde. On verra ça plus tard.

On notera par ailleurs, après avoir fait le test, que :

$$\text{Pour } f(x) = \ln(x), \text{ la dérivée est } f'(x) = \frac{1}{x}$$

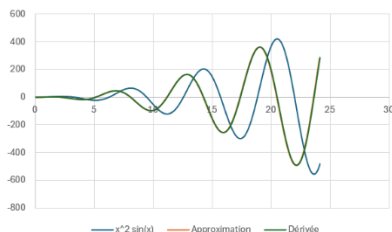
$$\text{Pour } f(x) = e^x, \text{ la dérivée est } f'(x) = e^x$$

Eh oui : la fonction exponentielle est égale à sa propre dérivée. Pour l'anecdote, c'est en connaissant cette propriété et en faisant des approximations que j'ai trouvé la valeur de e : 2,71828...

Il y a des cas hélas où trouver la dérivée n'est pas simple. Et là encore, sans pouvoir le prouver, je donne les trois règles à mémoriser pour des cas particuliers :

Dérivée d'un produit de fonctions

Pour le produit de fonctions uv , la dérivée est $u'v + uv'$

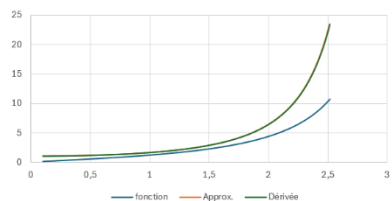


Imaginons une fonction $f(x) = x^2 \sin(x)$. Selon cette règle, la dérivée serait :

$$2x \sin(x) + x^2 \cos(x)$$

J'ai fait le test en comparant l'approximation avec ce résultat, et ça marche : si vous ne voyez pas la courbe rouge de l'approximation dans le graphique ci-contre, c'est qu'elle pile en dessous de la celle pour la dérivée...

Dérivée d'un quotient de fonctions



Pour le quotient de fonction $\frac{u}{v}$, la dérivée est $\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Imaginons une fonction $f(x) = \frac{x^2}{\sin(x)}$. Selon cette règle, la dérivée serait :

$$\frac{2x \sin(x) - x^2 \cos(x)}{\sin^2(x)}$$

J'ai vérifié encore avec une approximation, et là encore, ça a l'air de bien marcher, cette petite règle absolument pas compliquée...

Je pourrais peut être en profiter pour savoir ce que c'est, la dérivée de $\tan(\theta)$. Parce qu'on se souvient que :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Allons-y :

$$\frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

On utilise l'identité trigonométrique : $\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta)$

Le résultat se réécrit :

$$\frac{1}{\cos^2(x)}$$

Pas étonnant que je ne pouvais pas la deviner, celle-là...

Fonctions imbriquées

Pour $f(g)$, la dérivée est $g'f'(g)$

C'est probablement la plus importante des trois : lorsqu'une fonction contient elle-même une fonction. On prend la dérivée de la fonction g , et on la multiplie par la dérivée de la fonction f . Ce qui est à l'intérieur de la fonction f est inchangé.

Par exemple : $f(x) = \sin(x^2)$ – une fonction x^2 dans une fonction sinus. On applique :

$$f'(x) = 2x \cos(x^2)$$

Logiciels de calcul formel

Je ne connais pas d'autres règles de dérivation – il me semble qu'avec tout ça on peut s'occuper de pas mal de problèmes – mais il en existe. Parfois, les choses deviennent trop compliquées, et la technologie peut nous venir en aide.

On a déjà vu qu'on peut toujours faire une approximation de la dérivée d'une fonction. Trouver la fonction qui épouse parfaitement cette approximation peut s'avérer difficile, toutefois.

Un logiciel de calcul formel peut théoriquement résoudre n'importe quelle opération, y compris des opérations contenant des lettres, y compris des équations, des dérivées, des intégrales... Deux problèmes toutefois :

- parfois, il est très difficile de comprendre la réponse du logiciel. Cela demande donc de tester la réponse en la comparant à une approximation.
- le langage utilisé par le logiciel doit être appris. [Wolfram Alpha](#), une version en ligne du logiciel de référence Mathematica, demande des formules en Latex ; [Geogebra](#), libre, gratuit et utilisable en ligne, a son propre codage en français.

Il faudra donc faire un peu de recherche avant de pouvoir utiliser ces logiciels de calculs formels.



Oui, il est possible de prendre la dérivée de fonctions plus complexes que de simples polynômes. A l'occasion, on en verra d'autres, mais voilà déjà une bonne base de travail.

Stratégies d'intégration

L'intégration des polynômes, au bout d'un certain temps, ça devient un automatisme : augmenter l'exposant de un, et diviser le tout par le résultat. Mais il y a d'autres cas où l'intégration demande un peu plus de travail. Et surtout, de regarder ces choses avec un œil neuf.

On a compris que l'intégration, c'est trouver la primitive d'une fonction $f(x)$ et y appliquer des limites.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Et si la primitive est *presque* la réciproque de la dérivée, l'intégrale l'est complètement – tant qu'elle est bien définie. On peut donc prendre l'intégrale comme une de ces opérations qui permettent d'annuler un terme : dx (ou la dérivée de n'importe quelle autre variable d'intégration).

Attardons-nous un peu sur ce point.

Supposons une fonction f . Jusqu'à maintenant, on a noté sa dérivée $f'(x)$, mais ce n'est pas assez clair.

Rappelez-vous que la dérivée était la tangente entre deux points de la fonction. Et la tangente, c'est Δy divisé par Δx .

Mais un changement dans la verticale et un changement dans la fonction, c'est la même chose ! Rappelez-vous : pour trouver l'antécédent x d'une valeur $y = f(x)$, on remplace $f(x)$ par y et on résout pour x .

On peut donc écrire :

Pour une fonction $f(x)$, sa dérivée est $\frac{df(x)}{dx}$.

Ou plus concisément :

Pour une fonction f , sa dérivée est $\frac{df}{dx}$.

On peut ne plus indiquer la variable de la fonction, à condition de la garder en mémoire...

Appliquons cette nouvelle manière d'écrire à un exemple. On en verra l'utilité.

Supposons la fonction $f(x) = 3x^2$. Sa dérivée est, selon cette nouvelle notation :

$$\frac{df}{dx} = 6x$$

$$df = 6x dx$$

Maintenant, supposons que nous voulions retrouver la fonction originale. Comme c'est une équation, quoi que ce soit qu'on fasse d'un côté on doit le faire de l'autre. Et ici, c'est l'intégrale qu'on doit faire.

$$\int df = \int 6x dx$$

Mais il nous manque les limites.

- à gauche, la variable d'intégration est f : on évaluera donc de 0 à f
- A droite, la variable d'intégration est x : on évaluera donc de 0 à x

$$\int_0^f 1 df = \int_0^x 6x dx$$

J'ai ajouté un 1 pour clarifier ce qui va se produire maintenant :

- la primitive d'une constante, c'est la variable multipliée par la constante
- la primitive de $6x$, c'est la variable augmentée d'un degré, le tout divisé par ce nouveau degré

$$[f]_0^f = [3x^2]_0^x$$

On évalue aux limites et on fait la différence : le résultat est :

$$f = 3x^2$$

On est revenu à la fonction originale. Comme on s'y attendait. On a donc trouvé une technique assez simple pour créer une réciproque à la dérivée.

Substitution de variables

Si la fonction à intégrer contient elle-même une fonction, on peut (parfois) remplacer cette deuxième fonction par une autre variable. Ce n'est possible que dans un nombre restreint de cas, mais ces cas reviennent tellement souvent que cette technique est indispensable à maîtriser.

Et encore une fois, c'est peut être plus clair en prenant un exemple.

Supposons l'intégrale suivante :

$$\int_0^x 3\sin(2x) dx$$

Passons tout de suite le coefficient en dehors de l'intégrale, ça clarifiera les choses.

$$3 \int_0^x \sin(2x) dx$$

Substituons la fonction $2x$ pour u . On a donc :

$$u = 2x$$

Prenons la dérivée de u :

$$\frac{du}{dx} = 2$$

Réolvons pour dx :

$$dx = \frac{du}{2}$$

Nous avons maintenant les substitutions possibles suivantes :

$$dx = \frac{du}{2} \text{ et } u = 2x$$

On les applique à l'intégrale – et on va ignorer les limites pour un instant :

$$3 \int_0^x \sin(2x) dx \rightarrow \frac{3}{2} \int \sin(u) du$$

On connaît la primitive de $\sin(u)$ – c'est $-\cos(u)$:

$$\frac{-3}{2} [\cos(u)]$$

Réintégrons le terme en x et les limites – pour rappel, $u = 2x$:

$$\frac{-3}{2} [\cos(2x)]_0^x$$

$$\frac{-3}{2} (\cos(2x) - \cos(0))$$

$$\frac{-3}{2} (\cos(2x) - 1)$$

Cette technique a ses limites (ha ha). Si la fonction était $\sin(x^2)$, la dérivée de x^2 étant $2x$, la substitution contiendrait encore un terme en x . Et l'idée de la substitution, c'est de substituer. Entièrement.

Mais comme je le disais, les cas où la technique de substitution s'applique sont pléthores. Résumons-donc la procédure :

- substituer la fonction pour u ; prendre la dérivée de u
- résoudre la dérivée de u pour la variable d'intégration
- substituer la variable d'intégration et la fonction dans l'intégrale
- trouver la primitive
- resubstituer u pour la fonction, et appliquer le théorème fondamental de l'analyse

Séparation de variables

Il peut arriver qu'une expression contienne la fonction et sa dérivée. Et deux variables. Oui, les choses deviennent compliquées, mais reviennent souvent – surtout en physiques.

Essayons de trouver un exemple qui décrit ce problème.

$$\frac{df}{dt} = f$$

On a donc une fonction f et sa dérivée df ; la dérivée dt .

La technique de séparation des variables consiste à rassembler tout ce qui concerne f d'un côté, et tout ce qui concerne t de l'autre.

$$\frac{df}{f} = dt$$

Et maintenant, on intègre : sur f pour le côté gauche ; sur t pour le côté droit.

$$\int_1^f \frac{1}{f} df = \int_1^t 1 dt$$

Pourquoi ai-je pris ces limites d'intégration ? Parce que $\ln(0) = -\infty$. Plus généralement : il va falloir qu'on reparle des limites d'intégration.

On trouve les primitives :

$$[\ln(f)]_1^f = [t]_1^t$$

$$\ln(f) - \ln(1) = t - 1$$

Comme $\ln(1) = 0$, il ne reste plus qu'à résoudre pour f :

$$\ln(f) = t - 1$$

$$f = e^{t-1}$$

Limites d'intégration

Les limites d'intégration dépendent du problème qu'on est en train de résoudre. En effet, on se rappellera que, graphiquement, l'intégrale entre a et b est la surface sous la courbe représentant la fonction entre a et b . Tout dépend donc de ce que vous cherchez.

Dans un premier cas, vous cherchez en effet une surface. Dans ce cas, ce sont les valeurs de a et de b que vous choisissez (ou qu'un exercice vous impose) qui sont vos limites d'intégration.

Par exemple, la surface en dessous de la courbe représentée par la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ entre 1 et 2 est égale à :

$$\begin{aligned} \int_1^2 (ax^2 + bx + c) dx &= \left[\frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx \right]_1^2 \\ &= \frac{8}{3} a + \frac{4}{2} b + 2c - \frac{1}{3} a - \frac{1}{2} b + c \\ &= \frac{7}{3} a + \frac{3}{2} b + c \end{aligned}$$

Dans un second cas, vous cherchez une fonction. Les limites seront donc de zéro à la variable de cette fonction.

Par exemple, on cherche une fonction pour calculer la surface sous la courbe représentée par la fonction précédente ($f(x) = ax^2 + bx + c$) de zéro à n'importe quelle valeur de x . On appellera cette fonction $S(x)$.

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x (ax^2 + bx + c) dx = \left[\frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx \right]_0^x \\ S(x) &= \frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx \end{aligned}$$

C'est valable pour beaucoup de fonctions, mais attention : si vous vous retrouvez avec un logarithme, la variable de départ ne peut pas être zéro. Il faut donc changer.

Le plus souvent, les limites d'intégration sont sous-entendues dans le problème. Il est temps pour un exemple.

Et c'est un de mes exemples favoris : l'évolution de la température dans un local peu isolé.

OK, je dois d'abord donner un peu de physique.

La chaleur – l'énergie qui sort ou qui rentre dans la matière – est définie comme suit :

$$\Delta E = mc \Delta T$$

La puissance thermique est la quantité d'énergie par unité de temps qui traverse une surface (comme un mur, par exemple).

$$\frac{dE}{dt} = US(T - T_{ext})$$

Si on s'intéresse à des petits changements d'énergie – et à en faire la somme après pour avoir des grands changements d'énergie – on peut réécrire la première formule :

$$dE = -mc dT$$

L'expression est négative parce que de l'énergie est perdue par la matière.

On peut combiner ces deux expressions :

$$\frac{-mcdT}{dt} = US(T - T_{ext})$$

Séparons les variables (température T et temps t) :

$$\frac{dT}{T - T_{ext}} = \frac{-US}{mc} dt$$

Ce qu'on cherche à trouver est une fonction qui nous donnera l'évolution de la température d'un temps $t = 0$ à un temps $t = t$. Voilà pour les limites à droite de l'équation.

A gauche, la variable est la température. Au départ, il y a une certaine température initiale T_0 . A la fin, il y aura une certaine température T . Voilà pour les limites à gauche de l'équation.

Et voilà pour la partie réflexive du problème. Le reste n'est que de l'application de procédures mathématiques.

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{T - T_{ext}} = \int_0^t \frac{-US}{mc} dt$$

On trouve les primitives :

$$[\ln(T - T_{ext})]_{T_0}^T = \frac{-US}{mc} [t]_0^t$$

$$\ln(T - T_{ext}) - \ln(T_0 - T_{ext}) = \frac{-US}{mc} t$$

On utilise l'identité $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$.

$$\ln\left(\frac{T - T_{ext}}{T_0 - T_{ext}}\right) = \frac{-US}{mc} t$$

Et on résout :

$$\frac{T - T_{ext}}{T_0 - T_{ext}} = e^{\frac{-US}{mc}t}$$

$$T - T_{ext} = (T_0 - T_{ext})e^{\frac{-US}{mc}t}$$

$$T = T_{ext} + (T_0 - T_{ext})e^{\frac{-US}{mc}t}$$

On peut vérifier que cette fonction fasse sens, quand confronté à la réalité : au début, lorsque $t = 0$, $T = T_0$; lorsque $t = \infty$, $T = T_{ext}$. Comme prévu.

On a accompli l'objectif : trouver une fonction qui décrit la température en fonction du temps. Elle est imparfaite – impossible de calculer quand la température intérieure sera égale à la température extérieure – mais elle fonctionne pour calculer, par exemple, la température d'un liquide dans un thermos après une heure.

La leçon à retenir ici (en plus de toutes les galipettes mathématiques qu'il faut faire avant d'arriver à la réponse), c'est que le choix des limites est important, et basé sur la problématique à résoudre. Pensez à y attribuer un temps de réflexion.



Les techniques de résolution d'une intégrale appellent pas mal d'autres compétences : réécrire, résoudre, prendre la dérivée... Ne vous inquiétez pas, je trouverai bien d'autres exemples...

Systèmes de coordonnées et intégrales en trois dimensions

Nous avons les intégrales, nous avons les définitions des surfaces et volumes : calculons des trucs !

Dans un espace en trois dimensions, un système de coordonnées est un système qui utilise trois axes perpendiculaires les uns aux autres pour décrire la position d'un point.

Une surface est le produit de deux dimensions ; par exemple, pour une surface dans x et y :

$$dS = dx dy$$

Un volume est le produit de trois dimensions :

$$dV = dx dy dz$$

Vous l'avez compris : nous allons utiliser le concept d'intégrales pour calculer des surfaces et des volumes décrits par des fonctions.

Dans le système cartésien que vous connaissez bien, les axes sont des lignes droites : x , y et z .

Si nous voulons calculer la surface d'un carré de côté a , on définit les limites :

$$x: 0 \rightarrow a$$

$$y: 0 \rightarrow a$$

On applique la définition de la surface :

$$S = \int_0^a \int_0^a dx dy$$

Ce que vous découvrez ici sous vos yeux ébahis, c'est une double intégrale, ou une intégrale de surface. En effet, il y a deux variables d'intégration (dx et dy), donc il faut deux intégrales.

On commence toujours par l'intégrale à l'intérieur, puis on résout la suivante, et ainsi de suite en allant jusqu'à l'extérieur.

$$S = \int_0^a \int_0^a dx dy$$

$$S = \int_0^a [x]_0^a dy$$

$$S = \int_0^a a dy$$

$$S = a[y]_0^a$$

$$S = a^2$$

Ça semble beaucoup de travail pour trouver la surface d'un carré.

Supposons maintenant que la limite supérieure dans le sens de y soit une fonction de x : $f(x)$.

$$S = \int_0^a \int_0^{f(x)} dy dx$$

Noter que, comme j'ai une fonction de x dans une limite, je commence par celle-là avant de prendre l'intégrale sur x . L'idée est de prendre en compte les variables x qui se trouvent dans la fonction.

$$S = \int_0^a [y]_0^{f(x)} dx$$

$$S = \int_0^a f(x) dx$$

Bien. On a retrouvé l'intégrale pour calculer la surface en dessous d'une courbe. Ça avance vite, hein ?

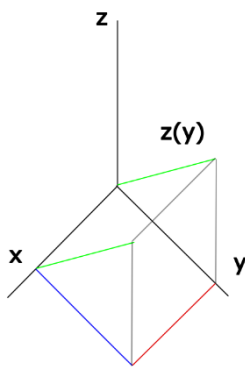
OK. Je suppose que si je faisais la même chose pour un volume, je retrouverais la formule pour calculer le volume d'un cube. Passons cela.

Et si le volume du cube était limité dans le sens de z par une fonction $f(x)$?

$$V = \int_0^a \int_0^a \int_0^{f(x)} dz dy dx$$

Encore une fois : z est la dimension dans laquelle $f(x)$ s'applique. On fait en sorte de commencer par cette intégrale.

Bon, ça demande d'être visualisé, tout ça.



Supposons un coin – un pavé droit coupé en deux dans le sens de la diagonale. Dans le sens de x et y , la distance entre l'axe et le bord du coin est constante. Dans le sens de z , elle est donnée par $z(y) = 3y$.

On écrit l'intégrale :

$$V = \int_0^a \int_0^a \int_0^{3y} dz dx dy$$

On commence par l'intégrale centrale.

$$V = \int_0^a \int_0^a 3y dx dy$$

Oui, je commence à prendre des raccourcis, mais à ce stade, si vous ne comprenez pas comment je suis passé de la première étape à la deuxième, ça veut dire qu'il faut que vous preniez un peu de recul. Par là, je veux dire retourner en arrière. Et revenir ici.

C'est bon, vous êtes revenus ?

Du point de vue de x , y est une constante. L'intégrale suivante est donc simple :

$$V = \int_0^a 3ya dy$$

Et enfin, l'intégrale évaluée sur y :

$$V = 3a \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^a$$

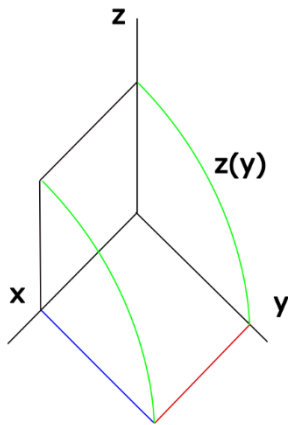
$$V = \frac{3}{2} a^3$$

Vérifions ce résultat avec un peu de géométrie.

Si $z(y) = 3y$, alors la hauteur à $y = a$ est égale à $3a$.

Le volume du cube est donc $3a \times a \times a = 3a^3$.

Et comme un coin, c'est un cube coupé en deux : $V = \frac{3}{2}a^3$



On pourrait s'amuser un peu, et se poser la question : et si la fonction était une fonction carrée dont l'extremum est à $(0; 0; a)$ et dont la racine est à $y = a$.

D'abord, la fonction :

On connaît l'ordonnée à l'origine – c'est a – donc plus qu'à trouver le coefficient directeur.

$$0 = \textcolor{red}{a}a^2 + a$$

$$\textcolor{red}{a} = \frac{-a}{a^2} = \frac{-1}{a}$$

J'ai coloré le coefficient directeur $\textcolor{red}{a}$ pour le différencier de la longueur a .

On a trouvé la fonction :

$$z(y) = a - \frac{y^2}{a}$$

Maintenant, on met l'intégrale en place :

$$V = \int_0^a \int_0^a \int_0^{a - \frac{y^2}{a}} dz dx dy$$

Et, intégrale par intégrale, on se rapproche de la réponse :

$$V = \int_0^a \int_0^a \left(a - \frac{y^2}{a} \right) dx dy$$

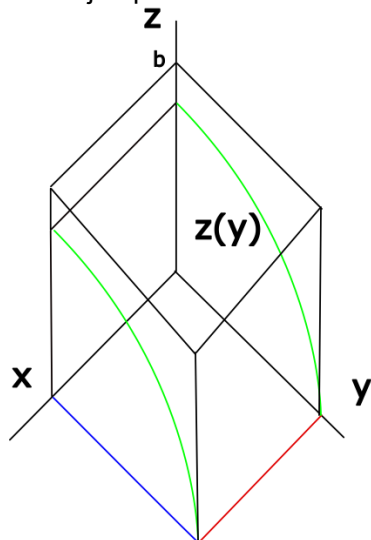
$$V = \int_0^a a \left(a - \frac{y^2}{a} \right) dy$$

$$V = \left[a^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^a$$

$$V = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3}a^3$$

C'est frustrant : je ne sais pas si j'ai raison. Mais je ne vois aucun problème dans ce raisonnement et dans ce résultat – la distance est au cube, ce à quoi on s'attend avec un volume. Je m'attendais juste à ce que le résultat soit un peu moins... joli. On va dire que je suis confiant à 70%...

Allez, ça m'embête un peu. Donc, élaborons une stratégie. On pourrait calculer un volume qui irait de la fonction jusqu'à une certaine distance b . L'intégrale deviendrait :



$$V = \int_0^a \int_0^a \int_{a-\frac{y^2}{a}}^b dz dx dy$$

$$V = \int_0^a \int_0^a \left(b - \left(a - \frac{y^2}{a} \right) \right) dx dy$$

$$V = \int_0^a a \left(b - a + \frac{y^2}{a} \right) dy$$

$$V = \int_0^a (ab - a^2 + y^2) dy$$

$$V = \left[aby - a^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^a$$

$$V = a^2 b - a^3 + \frac{a^3}{3}$$

Le volume entier est celui d'un bloc de base a^2 et de hauteur b .

$$V_T = a^2 b$$

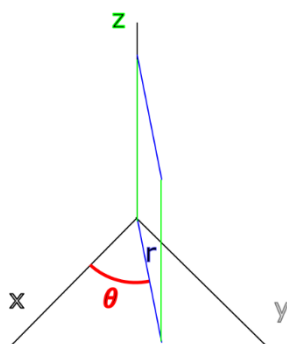
Et en utilisant les volumes des deux formes qu'on a calculé :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}a^3 + a^2 b - a^3 + \frac{a^3}{3} \\ = a^2 b \end{aligned}$$

On dirait que j'ai raison. Mon syndrome de l'imposteur est toujours présent, mais ma confiance dans ce résultat a monté à 80%.



Bon, ça fait un moment que je veux parler des autres systèmes de coordonnées... On y vient, on y vient.



Coordonnées cylindriques

Je sais que ce n'est pas évident, mais un angle est perpendiculaire à la droite d'où il part.

Il faudrait que je dessine ça.

Ca y est, c'est dessiné. Observez que l'axe θ est perpendiculaire à r , mais aussi à z . Car ce sont les trois coordonnées cylindriques : $(r; \theta; z)$.

Si on veut convertir des coordonnées cartésiennes en coordonnées cylindriques, un peu de trigonométrie et de Pythagore suffisent :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

Mais ce n'est pas ça qui nous intéresse. Ce qui nous intéresse, c'est de calculer des surfaces et des volumes.

Commençons par une surface plane, uniquement r et θ . Incidemment, on appelle ça les coordonnées polaires, contenant les deux premières dimensions des coordonnées cylindriques.

Nous devons donc traduire la définition de la surface en coordonnées cartésiennes :

$$dS = dx dy$$

... en coordonnées cylindriques.

Bon. On a utilisé les matrices Jacobiennes pour définir des éléments de volumes en coordonnées cylindriques et sphériques. Par géométrie, on peut aussi les définir :

- qu'une surface est le produit de deux dimensions (en mètres)
- que la longueur d'un arc de cercle est donnée par $l = r \theta$, où r est constant – donc un élément infiniment petit de distance dans cette direction est $dl = r d\theta$

Ainsi, les deux éléments de longueur sont dr et $r d\theta$. Et un élément de surface en coordonnées polaires est :

$$dS = r d\theta dr$$

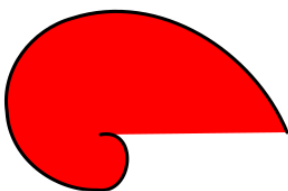
Vérifions en calculant la surface d'un disque ; les limites d'intégrations sont 0 à R dans le sens de r et de 0 à 2π dans le sens de θ :

$$S = \int_0^R \int_0^{2\pi} r d\theta dr$$

$$S = \int_0^R [\theta]_0^{2\pi} r dr$$

$$S = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R$$

$$S = \pi r^2$$



Très bien, ça a l'air de marcher. Maintenant, imaginons une surface un peu plus complexe. Par exemple, si le rayon était une fonction de l'angle. C'est-à-dire qu'il serait à zéro quand l'angle est à zéro, et à R quand l'angle est à 2π , et qu'entre les deux, il augmenterait linéairement en fonction de l'angle.

La fonction qui décrirait ça serait $r(\theta) = \frac{R}{2\pi} \theta$. A $\theta = 0$, $r = 0$. A $\theta = 2\pi$, $r = R$.

On place ça dans l'intégrale, et on intègre.

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R}{2\pi}\theta} r dr d\theta$$

Encore une fois, la fonction pour r contient la variable θ , c'est donc d'elle que je dois m'occuper en premier.

$$S = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\frac{R}{2\pi}\theta} d\theta$$

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{8\pi^2} \theta^2 d\theta$$

$$S = \left[\frac{R^2}{24\pi^2} \theta^3 \right]_0^{2\pi}$$

$$S = \frac{R^2}{3} \pi$$

Pour vérifier que je ne me trompe pas, rien ne vaut Wikipedia : la spirale d'Archimède est donnée par la fonction $r = a \theta$ et la surface balayée par le rayon au fur et à mesure qu'il tourne est égale à $\frac{a^2 \theta^3}{6}$.

Dans mon exemple, $a = \frac{R}{2\pi}$. Selon Archimède, donc :

$$S = \frac{1}{6} \left(\frac{R}{2\pi} \right)^2 (2\pi)^3 = \frac{1}{6} R^2 \times 2\pi = \frac{R^2}{3} \pi$$

Encore une fois, tout seul comme un grand, j'ai trouvé quelque chose de correct. Toujours le syndrome de l'imposteur, mais encore un peu plus de confiance dans ce que je dis.

Attention toutefois : cette procédure ne vaut que pour des angles inférieurs à 2π . Au-delà, la procédure compterait des éléments de surface plusieurs fois. L'intégrale compte la surface *balayée* par le rayon, et si on tourne plusieurs fois autour d'un axe, on balaye plusieurs fois la même surface.

Fort de ce succès, et si on calculait le volume d'un cône ? On l'a déjà fait par des moyens détournés, mais ce serait bien de le confirmer.

En coordonnées cylindriques, un élément de volume est :

$$dV = r dr d\theta dz$$

Oui, c'est simplement la surface de la base multipliée par la hauteur.

La hauteur d'un cône varie avec le rayon. On écrit donc la fonction :

$$z(r) = h - \frac{R}{h} r$$

Les limites d'intégration sont donc :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{h - \frac{R}{h} r} r dz dr d\theta$$

Pour la première intégrale, r est une constante. On intègre sur z :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R r \left(h - \frac{R}{h} r \right) dr d\theta$$

On distribue, on intègre sur r , et on simplifie :

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{h}{2} r^2 - \frac{h}{3R} r^3 \right]_0^R d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{h}{2} R^2 - \frac{h}{3} R^2 \right) d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{h}{6} R^2 d\theta$$

Et on intègre sur θ :

$$2\pi \frac{h}{6} R^2$$

$$\frac{1}{3} \pi R^2 h$$

On avait déjà trouvé ce résultat par des moyens détournés (l'addition de disques de hauteur dh). Cette méthode est plus qu'une confirmation : c'est une généralisation.

Bien. Et si c'était la surface du cône qu'on voulait calculer ?

Dans ce cas, on n'intégrerait pas sur r . Mais z serait toujours fonction de r .

$$z(r) = H - \frac{H}{R} r$$

On peut déterminer les dimensions d'un élément de surface : le produit de la distance dans le sens de θ avec celui dans le sens de l'apothème du cône. Et l'apothème du cône, c'est Pythagore qui nous la donne.

$$dS = r d\theta \sqrt{dr^2 + dz^2}$$

Maintenant, qu'est-ce que c'est, dz ? C'est la dérivée de z , qu'on vient juste d'exprimer en fonction de r ; prenons donc la dérivée de z par rapport à r :

$$dz = -\frac{H}{R} dr$$

On peut réécrire notre élément de surface :

$$dS = r d\theta \sqrt{dr^2 + \frac{H^2}{R^2} dr^2}$$

Factorisons le dr :

$$dS = \sqrt{1 + \frac{H^2}{R^2}} r dr d\theta$$

Maintenant, on peut intégrer. Dans le sens de θ , les limites d'intégration sont de zéro à 2π ; dans le sens de r , de zéro à R .

$$S = \sqrt{1 + \frac{H^2}{R^2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta$$

$$S = \sqrt{1 + \frac{H^2}{R^2}} \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\theta$$

$$S = \frac{R^2}{2} \sqrt{1 + \frac{H^2}{R^2}} 2\pi$$

Tout cela se simplifie gentiment :

$$S = \pi R \sqrt{R^2 + H^2}$$

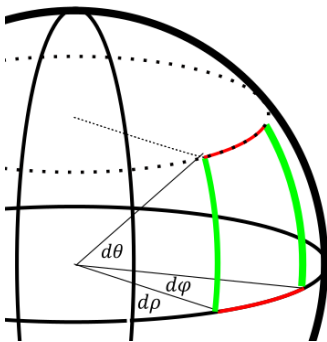
Et comme $\sqrt{R^2 + H^2}$, c'est l'apothème du cône :

$$S = \pi R a$$

On avait déjà trouvé ce résultat en utilisant quelques relations en géométrie : c'est rassurant qu'une seconde méthode donne la même chose. En fait, en regardant de plus près, on s'apercevrait que ces deux méthodes sont en fait identiques, mais passons...



On peut décrire beaucoup de choses avec les coordonnées cylindriques : des bouteilles, des vases... Il nous reste les coordonnées sphériques pour décrire d'autres choses encore.



Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques sont en fait celles qu'on utilise en géographie :

- le rayon ρ correspond à l'altitude, plus le rayon de la Terre
- l'angle φ correspond à la longitude
- l'angle θ correspond à la latitude

Comme avec les coordonnées sphériques, on doit trouver des expressions avec des distances pour pouvoir calculer des surfaces et des volumes.

Tout d'abord, dans le sens de ρ , on a... $d\rho$

Ensuite dans le sens d'une longitude, on a $\rho d\theta$

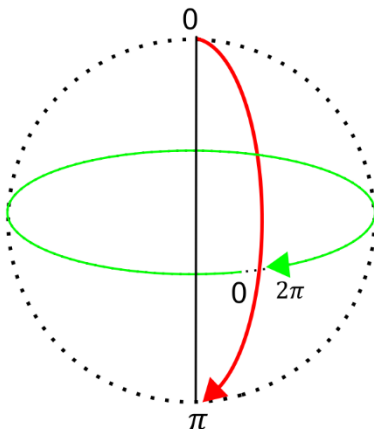
Enfin, dans le sens d'une latitude, on a $\rho \sin(\theta) d\varphi$

Donc, un élément de volume en coordonnées sphériques est donné par :

$$dV = \rho^2 \sin(\theta) d\rho d\theta d\varphi$$

Trouvons tout de suite la formule pour le volume d'une sphère, ça va me permettre de justifier les limites dans chaque dimension :

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\rho \rho^2 \sin(\theta) d\rho d\theta d\varphi$$



Dans le sens de ρ , on va très logiquement de zéro à ρ .

Dans le sens de φ , on fait un tour complet : $0 \rightarrow 2\pi$.

Dans le sens de θ , on ne parcourt qu'un demi-cercle ; sinon, on balayerait une plus grande surface et on la compterait deux fois. On parcourt donc $0 \rightarrow \pi$

Réolvons les intégrales :

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho^3}{3} \sin(\theta) d\theta d\varphi$$

$$V = \frac{\rho^3}{3} \int_0^{2\pi} [-\cos(\theta)]_0^\pi d\varphi$$

$$V = \frac{\rho^3}{3} \int_0^{2\pi} \left(-(\cos(\pi)) - (-\cos(0)) \right) d\varphi$$

$$V = \frac{\rho^3}{3} \int_0^{2\pi} (-(-1) - (-1)) d\varphi$$

$$V = \frac{2}{3} \rho^3 (2\pi)$$

$$V = \frac{4}{3} \pi \rho^3$$

Qui est en effet, selon tous les vrais bouquins de mathématiques, la formule pour le volume d'une sphère.

Pour la surface d'une sphère, on a les mêmes dimensions mais on n'intègre pas sur ρ – c'est constant.

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi$$

$$S = 2\rho^2 \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$S = 4\pi\rho^2$$

Maintenant, armé de tout cela, on pourrait calculer le volume d'objets rigolos, comme celui d'un œuf. Mais cela dépasse l'objet de ce document.



Ceci conclut la partie sur les intégrales pour trouver des surfaces ou des volumes. Il y aurait bien plus à dire, mais je pense qu'on peut déjà faire pas mal de choses avec ça.

Equations différentielles

Les équations différentielles sont d'abord et avant tout une méthode simple et efficace de briller en société.

Imaginez le tableau : vous jouez à Pictionary avec votre famille. A un moment donné, au lieu de dessiner un arrosoir ou une taroupe, vous écrivez une équation différentielle du premier degré non-homogène et sa résolution. Pour sûr, votre famille serait impressionnée.

A part ça, les équations différentielles sont des équations où les variables sont des fonctions.

Et qu'est-ce qu'on fait, avec une équation ? On la résout.

Premier degré

Homogène

Imaginons une équation différentielle homogène du premier degré :

$$\frac{dy}{dt} + \lambda y = 0$$

Qu'est ce qui fait de cette équation une équation différentielle ?

La fonction y et sa dérivée $\frac{dy}{dt}$ sont présentes.

Qu'est ce qui fait de cette équation différentielle une équation homogène ?

Toute l'équation est égale à zéro.

Et pourquoi on l'appelle homogène ?

Probablement parce qu'elle n'est pas hétérogène. Non, en fait, je ne sais pas.

Mais au fait, on a déjà résolu une équation différentielle comme ça, lors de la stratégie d'intégration par séparation des variables :

On sépare les variables :

$$\frac{dy}{y} = -\lambda dt$$

On prend la primitive des deux côtés ; on n'oublie pas d'ajouter les constantes :

$$\ln(y) + c_1 = -\lambda t + c_2$$

On résout pour y :

$$y = e^{-\lambda t + c_2 - c_1}$$

Et on simplifie. On note que $e^{c_2 - c_1}$ est une constante, qu'on appellera k .

$$y = e^{c_2 - c_1} e^{-\lambda t}$$

$$y = k e^{-\lambda t}$$

Alors c'est quoi, la procédure de résolution d'une équation différentielle homogène du premier ordre, si on savait déjà le faire ?

Hé bien, c'est exactement ça :

Pour toute équation différentielle de la forme :

$$\frac{dy}{dt} + \lambda y = 0$$

La solution est :

$$y = k e^{-\lambda t}$$

... où k dépend des conditions initiales.

Toute cela n'explique pas grand-chose. Prenons un exemple numérique (avec des valeurs) :

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 0, y(0) = 5$$

Vous avez noté la condition initiale ? C'est que quand $t = 0$, $y = 5$.

Ici, j'ai une équation différentielle du premier ordre et une condition initiale.

J'applique la solution :

$$y = k e^{-3t}$$

Puis la condition initiale :

$$y(0) = k e^{-3(0)}$$

$$5 = k$$

La solution complète est donc :

$$y = 5e^{-3t}$$

Les équations différentielles ne sont donc pas si compliquées.

Pour l'instant.

Prenons un exemple en physique :

Un condensateur chargé est connecté à une résistance. Un courant se crée, et le condensateur se décharge.

La tension sur le condensateur dépend de sa capacitance C et de la charge q qu'il contient :

$$U_C = \frac{q}{C}$$

La tension sur la résistance est donnée par la loi d'Ohm :

$$U_R = Ri$$

Et l'intensité est la charge passant par un point chaque seconde :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

La loi des mailles énonce que la somme des tensions est nécessairement égale à zéro. On écrit donc :

$$\frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} = 0$$

On peut réorganiser cette expression pour qu'elle s'apparente à notre modèle d'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = 0$$

On applique la solution :

$$q = ke^{-\frac{1}{RC}t}$$

La condition initiale est qu'à $t = 0$, le condensateur a une charge initiale Q_0 .

$$q(0) = Q_0$$

On applique cette condition initiale à la solution :

$$Q_0 = ke^{-\frac{1}{RC}0}$$

$$k = Q_0$$

Et on reporte la solution complète :

$$q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Cette fonction donne la charge sur un condensateur en fonction du temps.



Pour l'instant, c'est simple, les équations différentielles. Je ne veux pas dire que ce qui va suivre est insurmontable puisque même moi, je suis capable de les résoudre. Il va juste falloir faire un peu attention...

Non-homogène

Une équation différentielle non-homogène du premier ordre (ça roule sur la langue, hein ?) est une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dy}{dt} + \lambda y = F$$

La procédure de résolution ajoute deux ou trois étapes :

D'abord, écrire la solution générale y_0 de l'équation différentielle. La solution générale est la solution pour une équation différentielle du second ordre homogène (sans F).

$$y_0 = k(t)e^{-\lambda t}$$

Différence cruciale : k n'est plus simplement une constante qu'on ignore jusqu'à la fin, c'est maintenant une fonction de t .

Intégrer cette solution générale dans l'équation originale, et résoudre pour $k'(t)$:

$$\frac{d}{dt}(k(t)e^{-\lambda t}) + \lambda k(t)e^{-\lambda t} = F$$

$$k'(t)e^{-\lambda t} - \lambda k(t)e^{-\lambda t} + \lambda k(t)e^{-\lambda t} = F$$

Des termes s'annulent, c'est pratique :

$$k'(t)e^{-\lambda t} = F$$

$$k'(t) = Fe^{\lambda t}$$

Maintenant, il faut prendre la primitive aux deux côtés. Pour le côté gauche, c'est facile, mais pour le côté droit, au moins la première fois, il va falloir utiliser la technique de substitution $u = -\lambda t$ et $dt = -\frac{du}{\lambda}$:

Je réécris la fonction de manière plus intelligible :

$$dk = Fe^{\lambda t} dt$$

$$k(t) = \frac{F}{\lambda} e^u + c$$

$$k(t) = \frac{F}{\lambda} e^{\lambda t} + c$$

On peut mettre ce résultat dans la solution générale :

$$y = \left(\frac{F}{\lambda} e^{\lambda t} + c \right) e^{-\lambda t}$$

$$y = \frac{F}{\lambda} + ce^{-\lambda t}$$

Et, comme d'habitude, c dépend des conditions initiales.

C'est un peu plus compliqué, cette procédure – en plus, il y a une intégrale par substitution en plein milieu – mais on se rendra très vite compte que certaines parties deviennent des automatismes.

Prenons un exemple avec des valeurs numériques :

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 21 \text{ et } y(0) = 5$$

Tout d'abord, la solution générale :

$$y_0 = k(t)e^{-3t}$$

On place ça dans l'équation originale, y a des termes qui s'annulent, on résout pour $k'(t)$, et on prend l'intégrale aux deux côtés et ça donne :

$$k(t) = \frac{21}{3}e^{3t} + c$$

On place tout ça dans la solution générale pour obtenir la solution particulière :

$$y = (7e^{3t} + c)e^{-3t}$$

Et on développe :

$$y = 7 + ce^{-3t}$$

Enfin, on applique les conditions initiales :

$$5 = 7 + c$$

$$c = 5 - 7 = -2$$

Ce qui nous donne la solution :

$$y = 7 - 2e^{-3t}$$

Avant de passer à un exemple pratique, et si on vérifiait que je ne dise pas des bêtises ? Pour cela, il suffirait d'insérer ce résultat dans l'équation originale.

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 21$$

$$6e^{-3t} + 3(7 - 2e^{-3t}) = 21$$

$$6e^{-3t} + 21 - 6e^{-3t} = 21$$

$$21 = 21$$

Je ne dis pas des bêtises.

Prenons maintenant un exemple en physique :

Un condensateur est branché en série avec une résistance et une source de tension. La loi des mailles donne dans ce cas :

$$U - \frac{q}{C} - R \frac{dq}{dt} = 0$$

On réorganise :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{U}{R}$$

La solution générale est :

$$q_0 = k(t)e^{\frac{-t}{RC}}$$

On place ça dans l'équation originale, y a des termes qui s'annulent, on résout pour $k'(t)$, et on prend l'intégrale aux deux côtés et ça donne :

$$k(t) = UCe^{\frac{t}{RC}} + c$$

On place tout ça dans la solution générale pour obtenir la solution particulière :

$$q = \left(UCe^{\frac{t}{RC}} + c\right)e^{\frac{-t}{RC}}$$

$$q = UC + ce^{\frac{-t}{RC}}$$

Comme condition initiale, on peut deviner que le condensateur est déchargé au départ. La charge q est donc égale à zéro à $t = 0$.

$$0 = UC + c$$

$$c = -UC$$

Ce qui nous donne la solution complète :

$$q = UC \left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right)$$



Bien. La procédure de résolution est devenue un peu plus compliquée, mais beaucoup d'étapes se répètent. Maintenant, accrochez-vous, on va passer au second degré.

Second ordre

Une équation différentielle homogène du second ordre est une équation qui contient une fonction et sa dérivée seconde.

La seconde dérivée d'une fonction f par rapport à une variable x s'écrira ici $\frac{d^2f}{dx^2}$ ou plus concisément f'' .

Donc, la forme typique d'une équation différentielle du second ordre est :

$$a \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = 0$$

Ou, plus concisément :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

La procédure de résolution, sans plus d'explications, est un peu longue.

D'abord, on remplace les fonctions et leurs dérivées par une variable r à une puissance égale au degré (nombre de dérivée).

$$\frac{d^2y}{dt^2} \rightarrow r^2$$

$$\frac{dy}{dt} \rightarrow r$$

$$y \rightarrow r^0 = 1$$

On se retrouve alors avec une équation du second degré avec r comme inconnue : l'équation caractéristique.

$$ar^2 + br + c = 0$$

Les solutions de cette équation sont données par la formule quadratique :

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La solution de l'équation différentielle est enfin la somme de deux fonctions qui rappellent la solution d'une équation différentielle du premier ordre :

$$y = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

où A et B sont des constantes déterminées par des conditions initiales.

Bon. Je pense que c'est assez compliqué pour diviser les équations différentielles homogènes du second ordre en deux parties : le cas où il n'y pas de terme by , et le cas où il y en a un.

$$ay'' - c = 0$$

Ah, et aussi : c est négatif. Je garde les complications pour plus tard. L'équation caractéristique est :

$$ar^2 - c = 0$$

On trouve r :

$$r = \pm \sqrt{\frac{c}{a}}$$

La solution est donc :

$$y = Ae^{\sqrt{\frac{c}{a}}t} + Be^{-\sqrt{\frac{c}{a}}t}$$

Très bien. Facile. Bon.

Maintenant, et si c était positif ?

$$ar^2 + c = 0$$

$$r = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Oh. Problème. On a la racine carrée d'un nombre négatif. Et ça, c'est incalculable. La racine carrée est la réciproque de l'exposant 2, et n'importe quel nombre à l'exposant 2 donne un nombre positif. Pas un nombre négatif...

Bon. On va devoir tricher. Et par tricher, je veux dire résumer plusieurs siècles de travail de mathématiciens qui ont donné leur nom à des théorèmes comme à des avenues en une lettre : i .

Le nombre i est un nombre imaginaire. Sa seule et unique propriété se découvre quand on le met au carré :

$$i^2 = -1$$

Avec i dans notre arsenal, on peut réécrire notre résultat :

$$r = \pm \sqrt{\frac{i^2 c}{a}} = \pm i \sqrt{\frac{c}{a}}$$

On peut donc écrire notre solution :

$$y = Ae^{i\sqrt{\frac{c}{a}}t} + Be^{-i\sqrt{\frac{c}{a}}t}$$

On est bien avancés, hein ?

Bon. On va avoir besoin de la relation de Euler.

Je ne sais pas pourquoi (une histoire de séries de Taylor), mais la relation de Euler dit ceci :

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

En voyant cette relation, il me vient une idée : et si je remplaçais x par π ?

$$e^{i\pi} = -1$$

Et ça, ça me garde éveillé la nuit.

Le nombre e est irrationnel ; π est lui aussi irrationnel. Mais dans cette opération, ces deux nombres ensemble donnent un nombre exact. Personnellement, je trouve que cela confère des pouvoirs magiques à ce fameux nombre i . Qui pourtant, à la surface, n'a pour seule propriété que son carré est égal à -1 .

Passons avec regret.

Et utilisons la relation de Euler pour voir si elle peut nous tirer d'embarras.

$$y = Ae^{i\sqrt{\frac{c}{a}}t} + Be^{-i\sqrt{\frac{c}{a}}t}$$

$$y = A \left(\cos\left(\sqrt{\frac{c}{a}}t\right) + i \sin\left(\sqrt{\frac{c}{a}}t\right) \right) + B \left(\cos\left(\sqrt{\frac{c}{a}}t\right) + i \sin\left(\sqrt{\frac{c}{a}}t\right) \right)$$

On développe, et on factorise :

$$y = A \cos\left(\sqrt{\frac{c}{a}}t\right) + A i \sin\left(\sqrt{\frac{c}{a}}t\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{c}{a}}t\right) + B i \sin\left(\sqrt{\frac{c}{a}}t\right)$$

$$y = (A + B) \cos\left(\sqrt{\frac{c}{a}}t\right) + (Ai + Bi) \sin\left(\sqrt{\frac{c}{a}}t\right)$$

Il y a deux termes entre parenthèses qui sont des constantes. Appelons-les :

$$\alpha = A + B$$

$$\beta = Ai + Bi$$

Et réécrivons notre solution :

$$y = \alpha \cos\left(\sqrt{\frac{c}{a}}t\right) + \beta \sin\left(\sqrt{\frac{c}{a}}t\right)$$

Je suis un peu embêté par ce β , parce qu'il contient cette lettre effrayante, i . Mais je vais faire de mon mieux pour l'oublier car, après tout, ce n'est qu'une constante...

Il ne resterait plus à ce stade qu'à appliquer les conditions initiales. Je pense qu'il serait bon de plutôt présenter un exemple. En physique.

Je dispose un ressort à l'horizontale sur une table, et je l'attache à un point. J'attache à l'autre bout une masse, et je tire sur le ressort. Lorsque je le relâche, la masse oscille entre la gauche et la droite.

Très bien. La force avec laquelle le ressort retient la masse est donnée par la loi de Hooke :

$$F_k = -kx$$

où k est le coefficient de raideur du ressort.

Au moment où je relâche le ressort, la situation est dynamique. Dans ce cas, la somme des forces en présence est égale à ma , où a est l'accélération. La seule force en présence étant F_k , j'écris :

$$ma = -kx$$

L'accélération a est la seconde dérivée de la position x . Je réécris donc mon équation sous la forme d'une équation différentielle :

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0$$

L'équation caractéristique donne :

$$r^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$r = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Et la solution de l'équation différentielle :

$$x = Ae^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + Be^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

Qui, selon la relation de Euler, se réécrit :

$$x = \alpha \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \beta \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Maintenant, appliquons les conditions initiales :

A $t = 0$, on relâche le ressort. Ça veut dire qu'à ce moment précis, on l'a étiré sur une distance x_0 . La position x à $t = 0$ est donc :

$$x_0 = \alpha \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}0\right) + \beta \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}0\right)$$

$$x_0 = \alpha$$

Fort bien. Maintenant, qu'en est-il de la vitesse ? A $t = 0$, elle est égale à zéro : le ressort ne s'est pas encore contracté, il n'a pas encore commencé son mouvement. On trouve donc la dérivée de la position – à propos, la dérivée de la position x sur le temps t , c'est la définition de la vitesse :

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha \sqrt{\frac{k}{a}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + \beta \sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

Et, comme on l'a dit, tout ça est égal à 0 lorsque $t = 0$:

$$0 = -\alpha \sqrt{\frac{k}{a}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} 0\right) + \beta \sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} 0\right)$$

Cette expression qui, il faut bien le dire, fait un peu mal aux yeux, se simplifie dramatiquement :

$$0 = \beta$$

On peut donc réécrire notre solution :

$$x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

C'est l'équation de mouvement d'un oscillateur. Le terme qui multiplie t dans le cosinus est nécessairement la vitesse angulaire ω (l'argument d'une fonction trigonométrique étant toujours un angle en radians), c'est-à-dire l'angle parcouru chaque seconde :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Mais un ressort, me direz-vous, ça ne parcourt pas un angle. Ca va et vient et puis c'est tout, non ? Non ?

C'est vrai, rassurez-vous. Calmez-vous, tout va bien se passer.

Il s'agit ici d'une *représentation* mathématique d'un phénomène physique. Bien sûr que le ressort ne se met pas à tourner, mais son mouvement peut être *représenté* par une fonction trigonométrique. Et le point même de la physique est de *représenter* le monde en utilisant les outils mathématiques qu'on a développé pour mieux le comprendre.



Mais ce n'est pas un cours de physique, c'est un cours de mathématiques. Passons. Nous avons couvert le cas où il n'y a pas de première dérivée dans l'équation différentielle. Il va bien falloir couvrir le cas où il y en a une.

Nous avons vu dans l'épisode précédent comment résoudre une équation différentielle du second ordre homogène lorsqu'il n'y a pas de première dérivée.

$$ay'' + cy = 0$$

Il va bien falloir maintenant se coltiner le cas où il y en a un :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

L'équation caractéristique donne :

$$ar^2 + br + c = 0$$

Les solutions de cette équation sont données par la formule quadratique :

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Mais là, je dis stop. Les choses deviennent trop compliquées. Pour ne pas s'y perdre, je vais tout d'abord séparer les solutions :

$$r = \frac{-b}{2a}$$

$$s = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Et mes solutions sont :

$$r \pm s$$

Donc, la solution de l'équation différentielle est :

$$y = e^{rt}(Ae^{st} + Be^{-st})$$

Ca va nous permettre de nous concentrer sur ce qui se passe entre les parenthèses et de laisser intact ce qui est à l'extérieur.

Pour ce qui est entre les parenthèses, il y a trois possibilités.

La première est la plus simple : $b^2 - 4ac$ est positif. La solution reste telle quelle.

La seconde est encore plus simple : $b^2 - 4ac$ est égal à zéro. Alors la solution de l'équation différentielle devient alors simplement :

$$y = Ae^{rt}$$

C'est quand $b^2 - 4ac$ devient négatif que les choses se compliquent. Et que cet hideux i repointe le bout de son nez visqueux.

Là, il est nécessaire de faire une opération pour le faire apparaître :

$$s = \frac{\sqrt{(-1)(-1)(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

J'ai multiplié l'intérieur de la racine carré par moins un deux fois : rien n'est changé.

$$s = \frac{\sqrt{(-1)i^2(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Je sais qu'un de ces -1 est en fait i^2 incognito. Je le sors de la racine, et je distribue l'autre -1 .

$$s = i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Et la solution de l'équation différentielle se trouve être :

$$y = e^{rt} \left(Ae^{i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} t} + Be^{-i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} t} \right)$$

On comprend que ça fait une fonction qui fait un peu mal aux yeux.

Passons donc directement à l'exemple.

En reprenant notre exemple de tout à l'heure, en fait, et en y introduisant un amortissement c .

$$x'' + \frac{c}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$$

Tout de suite, et parce que je sais que plus tard, ça simplifiera les écritures, je définis deux constantes :

$$\lambda = \frac{c}{2m}$$

$$\omega_0 = \frac{k}{m}$$

L'équation différentielle devient :

$$x'' + 2\lambda x' + \omega_0 x = 0$$

On trouve l'équation caractéristique :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0 = 0$$

Et on trouve les solutions :

$$r = -\lambda$$

$$s = \frac{\sqrt{4\lambda^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

Maintenant, décrivons les trois cas :

- si $\lambda^2 - \omega_0 > 0$, alors la solution est

$$x = e^{-\lambda t}(Ae^{\omega' t} + Be^{-\omega' t})$$

$$\text{où } \omega' = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

- si $\lambda^2 - \omega_0 = 0$, alors la solution est :

$$y = Ae^{-\lambda t}$$

On parle alors de régime critique.

- si $\lambda^2 - \omega_0 < 0$, alors la solution est :

$$x = e^{-\lambda t}(Ae^{i\omega' t} + Be^{-i\omega' t})$$

$$\text{où } \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

Pour cette dernière solution, il y a encore une étape pour se débarrasser des i : la relation de Euler.

$$x = e^{-\lambda t}(\alpha \cos(\omega' t) + \beta \sin(\omega' t))$$

Bien. Comme d'habitude, la procédure demande de la rigueur mais, tant qu'on fait bien attention, les procédures sont assez simples à suivre.

Mais on n'a pas fini.

Eh oui, nous n'avons pas défini de conditions initiales.

Reprenons donc.

Au début de l'oscillation, $x(t) = x_0$. Et à ce même moment, $v(t) = 0$. Autrement dit : $x'(0) = 0$.

Commençons par le cas le plus simple :

$$x = Ae^{-\lambda t}$$

Facile :

$$x_0 = Ae^{-\lambda(0)}$$

Donc :

$$x = x_0 e^{-\lambda t}$$

Ensuite, le cas où $\lambda^2 - \omega > 0$:

$$x_0 = e^{-\lambda(0)}(Ae^{\omega'(0)} + Be^{-\omega'(0)})$$

$$x_0 = A + B$$

Prenons maintenant la dérivée de ce truc, ça devrait prendre une minute...

$$x'(t) = -\lambda e^{-\lambda t}(Ae^{\omega't} + Be^{-\omega't}) + e^{-\lambda t}(A\omega'e^{\omega't} - B\omega'e^{-\omega't})$$

Bien, ça demande un peu de concentration. Appliquons donc cette seconde condition initiale $x'(0) = 0$:

$$0 = -\lambda e^{-\lambda(0)}(Ae^{\omega'(0)} + Be^{-\omega'(0)}) + e^{-\lambda(0)}(A\omega'e^{\omega'(0)} - B\omega'e^{-\omega'(0)})$$

Merci à celui qui a inventé copier-coller.

Tout cela se simplifie :

$$0 = -\lambda(A + B) + A\omega' - B\omega'$$

$$0 = -\lambda(A + B) + \omega'(A - B)$$

Comme $x_0 = A + B$ et, logiquement, $B = x_0 - A$:

$$0 = -\lambda x_0 + \omega'(A - x_0 + A)$$

$$0 = -\lambda x_0 + 2A\omega' - x_0\omega'$$

$$A = \frac{x_0(\lambda + \omega')}{2\omega'}$$

$$B = x_0 - \frac{x_0(\lambda + \omega')}{2\omega'}$$

Et donc la solution est :

$$x = e^{-\lambda t} \left(\frac{x_0(\lambda + \omega')}{2\omega'} e^{\omega't} + \left(x_0 - \frac{x_0(\lambda + \omega')}{2\omega'} \right) e^{-\omega't} \right)$$

Par miracle, ça a l'air de marcher. A $t = 0$, tout se simplifie en x_0 .

Enfin, le cas où $\lambda^2 - \omega < 0$.

$$x_0 = e^{-\lambda(0)} (\alpha \cos(\omega'(0)) + \beta \sin(\omega'(0)))$$

$$x_0 = \alpha$$

OK, c'était facile. Et maintenant, on doit prendre la dérivée de cette monstruosité.

$$x'(t) = -\lambda e^{-\lambda t}(\alpha \cos(\omega' t) + \beta \sin(\omega' t)) + e^{-\lambda t}(\beta \omega' \cos(\omega' t) - \alpha \omega' \sin(\omega' t))$$

Là, on a utilisé deux des règles de dérivation qu'on a vues il y a longtemps. Plus qu'à remplacer tous ces t par des zéros...

$$0 = -\lambda e^{-\lambda(0)}(\alpha \cos(\omega'(0)) + \beta \sin(\omega'(0))) + e^{-\lambda(0)}(\beta \omega' \cos(\omega'(0)) - \alpha \omega' \sin(\omega'(0)))$$

$$0 = -\lambda \alpha + \beta \omega'$$

Et comme on a vu que $\alpha = x_0$, on peut résoudre pour β et obtenir une jolie expression :

$$\beta = \frac{x_0 \lambda}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

On met toutes ces informations dans la solution :

$$x = e^{-\lambda t} \left(x_0 \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t) + \frac{x_0 \lambda}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t) \right)$$

Je voudrais vous rappeler à ce point que nous cherchons à représenter mathématiquement le mouvement d'un ressort... Ca vaudrait le coup de tout compiler avec du vocabulaire de physique :

Régime apériodique (pas de rebonds) :

$$x = x_0 e^{-\lambda t} \left(\frac{\lambda + \omega'}{2\omega'} e^{\omega' t} + \left(1 - \frac{\lambda + \omega'}{2\omega'} \right) e^{-\omega' t} \right)$$

$$\omega' = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda = \frac{c}{2m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Régime pseudopériodique (rebonds) :

$$x = e^{-\lambda t} \left(x_0 \cos(\omega' t) + \frac{x_0 \lambda}{\omega'} \sin(\omega' t) \right)$$

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

$$\lambda = \frac{c}{2m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

D'accord. Ça ressemble au truc le plus long et le plus compliqué qu'on ait jamais fait. Mais quand on y pense, chaque étape prise indépendamment était relativement simple. Mais c'est la taille du résultat et les pages d'écritures qui impressionne.

Reste qu'il faut tester ça. En simulant tout ça dans une feuille de calculs...

Après de multiples fautes de frappe : ça marche. Ou en tous cas, la fonction décrivant le mouvement du ressort en fonction de l'amortissement semble s'accorder à ce qui se produit dans la réalité.

En dessous d'un certain ammortissement, l'oscillateur oscille un peu avant de revenir à son état de repos.

Au dessus d'un certain ammortissement, il n'y a aucune oscillation : le ressort revient à sa position de repos.



Mais ce n'était qu'un exemple. Le point de ce chapitre était de démontrer comment procéder pour résoudre une équation différentielle homogène du second ordre : en prenant son temps et en révisant tout ce qu'on sait des mathématiques...

